Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

Cursus préparatoire : Algèbre 2 et Analyse 2 17 avril 2024

Devoir surveillé 4

DURÉE : 1H30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes.

$$1.\ \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\mathrm{d}x, \qquad 2.\ \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x, \qquad 3.\ \int_1^e x^2\ln(x)\mathrm{d}x.$$

Indication : On pourra effectuer un changement de variables pour la 2.

Exercice 2 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Justifier que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Calculer cette limite.

Exercice 3 Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui, à tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe

$$u(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Calculer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$.
4. Déterminer une base de $\ker u$.
5. Les sous-espaces $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$. On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par v si $v(F) \subseteq F$.

1. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont stables par v.

Dans la suite de cet exercice, on suppose que u est un projecteur, c'est-à-dire que $u \circ u = u$.

2. Montrer que $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E.
3. Montrer que si $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont stables par v, alors $u \circ v = v \circ u$.