
Devoir surveillé 3

DURÉE : 1H30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 Soit E l'espace vectoriel sur \mathbf{R} des applications continues par morceaux de $[0, 1]$ vers \mathbf{R} . Soient F et G les sous-ensembles de E formés respectivement par les applications avec intégrale nulle et les fonctions constantes sur $[0, 1]$, c'est-à-dire

$$F = \left\{ f \in E : \int_0^1 f(x) \, dx = 0 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{ \varphi_c : c \in \mathbf{R} \},$$

où on a noté $\varphi_c : x \mapsto c$.

1. Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 2 Décomposer en éléments simples sur \mathbf{R} la fraction rationnelle

$$\frac{5X + 1}{X^3 - X}.$$

Exercice 3

1. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{X^2 - 3}{(X + 1)^2(X^2 + 1)}$ en éléments simples sur \mathbf{R} .
2. Calculer l'intégrale

$$\int_0^4 \frac{x^2 - 3}{(x + 1)^2(x^2 + 1)} \, dx.$$

Exercice 4 Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{2 + \cos x} \, dx = 0.$$

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^n} \, dx.$$

1. Calculer I_1 .
2. À l'aide d'une intégration par parties sur I_n , montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

3. En déduire la valeur de I_2 .