Université Claude Bernard - Lyon 1
Cursus préparatoire : Algèbre 2 et Analyse 2

Semestre de printemps 2023-2024
3 avril 2024

Devoir surveillé 3
DURÉE : 1H30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des applications continues par morceaux de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$. Soient F et G les sous-ensembles de E formés respectivement par les applications avec intégrale nulle et les fonctions constantes sur $[0,1]$, c'est-à-dire

$$F = \left\{ f \in E : \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \{\varphi_c : c \in \mathbf{R}\},$$

où on a noté $\varphi_c \colon x \mapsto c$.

1. Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

   SOLUTION. Montrons que F est un sev de E :
   - la fonction constante 0 appartient à F, car $\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$;
   - si $\lambda \in \mathbf{R}$ et $f, g \in F$, alors

   $$\int_0^1 (\lambda f + g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lambda f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \underbrace{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \underbrace{\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} = 0,$$

     d'où $\lambda f + g \in F$.

   Montrons que G est un sev de E :
   - φ_0 est la fonction constante 0 et appartient à G ;
   - si $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\varphi_a, \varphi_b \in G$, alors pour tout $x \in [0,1]$,

   $$(\lambda\varphi_a + \varphi_b)(x) = \lambda\varphi_a(x) + \varphi_b(x) = \lambda a + b = \varphi_{\lambda a + b}(x),$$

     c'est-à-dire $\lambda\varphi_a + \varphi_b = \varphi_{\lambda a + b}$, qui appartient à G.

2. Montrer que $E = F \oplus G$.

   SOLUTION. Pour montrer que $E = F \oplus G$, on vérifie que $F \cap G = \{\varphi_0\}$ et que $E = F + G$.
   - Si une fonction f appartient à F et à G, alors elle est de la forme $f = \varphi_c$ pour un certain $c \in \mathbf{R}$ et satisfait $0 = \int_0^1 \varphi_c(x)\,\mathrm{d}x = c$, d'où $c = 0$, et donc $f = \varphi_0$. Il s'ensuit que $F \cap G = \{\varphi_0\}$.
   - Pour montrer que $E = F + G$, on considère une fonction arbitraire $h \in E$ et on trouve $f \in F$ et $\varphi_c \in G$ telles que $h = f + \varphi_c$. Notons que, pour tout $r \in \mathbf{R}$,

   $$\int_0^1 (h - \varphi_r)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x - r.$$

     En choisissant $c = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$ et $f = h - \varphi_c$, il découle de l'égalité ci-dessus que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, c'est-à-dire $f \in F$. De plus, $f + \varphi_c = (h - \varphi_c) + \varphi_c = h$. On a ainsi trouvé $f \in F$ et $\varphi_c \in G$ satisfaisant $h = f + \varphi_c$.

Exercice 2 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle

$$\frac{5X+1}{X^3-X}.$$

Solution. On remarque d'abord que le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur, donc cette fraction a partie entière nulle. On procède alors à la factorisation du dénominateur

$$X^3-X = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1).$$

La DES sera donc de la forme

$$\frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1} = \frac{5X+1}{X^3-X}, \qquad (*)$$

où a, b et c sont des réels à déterminer. Pour calculer a, on multiplie par X à gauche et à droite de cette égalité, et on évalue en 0 (la racine du polynôme X)

$$a = \left[a + \frac{bX}{X-1} + \frac{cX}{X+1}\right]_{X=0} = \left[\frac{5X+1}{(X-1)(X+1)}\right]_{X=0} = -1.$$

De la même façon, pour calculer b on multiplie $(*)$ par $X-1$ et on évalue en 1 (la racine de $X-1$)

$$b = \left[\frac{5X+1}{X(X+1)}\right]_{X=1} = 3.$$

Enfin, pour calculer c on multiplie $(*)$ par $X+1$ et on évalue en -1

$$c = \left[\frac{5X+1}{X(X-1)}\right]_{X=-1} = -2.$$

On a ainsi trouvé

$$\frac{5X+1}{X^3-X} = -\frac{1}{X} + \frac{3}{X-1} - \frac{2}{X+1}.$$

Exercice 3

1. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{X^2-3}{(X+1)^2(X^2+1)}$ en éléments simples sur $\mathbf{R}$.

   Solution. On remarque d'abord que le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur, donc cette fraction a partie entière nulle. Le polynôme X^2+1 est irréductible sur $\mathbf{R}$, car ses racines sont $\pm i$. Il s'ensuit que la DES cherchée est de la forme

   $$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1} = \frac{X^2-3}{(X+1)^2(X^2+1)}, \qquad (\star)$$

   avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ à déterminer. Pour calculer b, on multiplie cette égalité par $(X+1)^2$ et on évalue en -1

   $$b = \left[a(X+1) + b + \frac{cX+d}{X^2+1}(X+1)^2\right]_{X=-1} = \left[\frac{X^2-3}{(X^2+1)}\right]_{X=-1} = -1.$$

   Pour calculer c et d, on multiplie $(\star)$ par X^2+1 et on évalue en i

   $$ci+d = \left[\frac{a}{X+1}(X^2+1) + \frac{b}{(X+1)^2}(X^2+1) + cX+d\right]_{X=i} = \left[\frac{X^2-3}{(X+1)^2}\right]_{X=i} = \frac{-4}{2i} = 2i.$$

On trouve ainsi $d+ci=2i$ et, comme c et d sont réels, cela donne $d=0$ et $c=2$. Enfin, pour calculer a, on multiplie $(\star)$ par X et on évalue la limite à $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{ax}{x+1}}_{\to a} + \underbrace{\frac{-x}{(x+1)^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2x^2}{x^2+1}}_{\to 2} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x^3-3x}{(x+1)^2(x^2+1)}}_{\to 0},$$

d'où $a+2=0$, c'est-à-dire $a=-2$. La DES cherchée est donc

$$\frac{X^2-3}{(X+1)^2(X^2+1)} = -\frac{2}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{2X}{X^2+1}.$$

2. Calculer l'intégrale

$$\int_0^4 \frac{x^2-3}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Solution. Par le point précédent et la linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^4 \frac{x^2-3}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = -2\int_0^4 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^4 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^4 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Or,

$$\int_0^4 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_0^4 = \ln(5)$$

et

$$\int_0^4 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{x+1}\right]_0^4 = -\frac{1}{5}+1 = \frac{4}{5}.$$

Ensuite, on remarque que la dernière intégrale est de la forme $\int_0^4 \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, où $f(x)=x^2+1$, et donc

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\ln(x^2+1)]_0^4 = \ln(17).$$

En mettant tout cela ensemble, on obtient enfin

$$\int_0^4 \frac{x^2-3}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \ln(17) - 2\ln(5) - \frac{4}{5}.$$

Exercice 4 Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Solution. On a $1 \leqslant 2+\cos x$, et donc pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, on a :

$$0 \leqslant \frac{x^n}{2+\cos x} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{2+\cos x} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, alors on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.
   Solution.
$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties sur I_n, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$
   Solution. On fait une intégration par parties sur I_n, en prenant $u(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ et $v'(x) = 1$. On a $u'(x) = -\frac{2nx}{(x^2+1)^{n+1}}$ et $v(x) = x$. Donc
$$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n} &= \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x - 2n\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} \end{aligned}$$
   Alors, on a :
$$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n}.$$
   Donc, on déduit :
$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

3. En déduire la valeur de I_2.
   Solution. Par 2., pour $n = 1$, on a :
$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$