Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2023-2024

Cursus préparatoire : Algèbre 2 et Analyse 2 — 13 mars 2024

Devoir surveillé 2

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $u_n = \left(\cosh\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$.

Exercice 2 Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, et soient $u, v, w \in E$ les suites de terme général $u_n = n$, $v_n = n^2 - 1$ et $w_n = 2^n$. Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

Exercice 3

1. Démontrer que l'ensemble $P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - y - 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
   On ne pourra pas utiliser de résultat général sur les sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ définis comme ensemble de solutions d'un système.
2. Déterminer une base et la nature géométrique de P_1.
3. On admettra que l'ensemble $P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - 2y - z = 0\}$ est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Donner, sans justifier cette fois-ci, une base et la nature géométrique de P_2.
4. On pose $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x - y - 2z)(x - 2y - z) = 0\}$.
   (a) Montrer que $U = P_1 \cup P_2$.
   (b) Est-ce que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?
5. Montrer que $D = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$ est un supplémentaire de P_1 dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 4 On considère u_1, u_2 et u_3 trois vecteurs d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, tels que u_1 et u_2 sont non colinéaires.

On pose

$$v_1 = -u_1 + u_2 + u_3, \quad v_2 = u_1 - u_2 + u_3, \quad v_3 = u_1 + u_2 - u_3 \quad \text{et} \quad v_4 = u_1 + 2u_2 + 3u_3.$$

On note F et G les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par (u_1, u_2, u_3) et par (v_1, v_2, v_3, v_4).

1. Justifier que $G \subseteq F$ et $2 \leqslant \dim F \leqslant 3$.
2. Est-ce que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) peut être libre ?
3. On suppose pour cette question que $\dim F = 3$.
   (a) Justifier que (u_1, u_2, u_3) est libre.
   (b) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est libre.
   (c) En déduire que $G = F$.
4. On suppose pour cette question que $\dim F = 2$.
   (a) Donner une base de F.
   (b) Calculer $v_1 + v_3$ et $v_2 + v_3$ et en déduire que $F = G$.