Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre de printemps 2023-2024

Cursus préparatoire : Algèbre 2 et Analyse 2 | 13 mars 2024

Devoir surveillé 2

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $u_n = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$.

(Barème : 3 points)

Solution : Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = e^{n^2 \ln(\cosh(1/n))}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, nous allons déterminer un équivalent simple en 0 de $x \mapsto \ln(\cosh(x))$. Nous pouvons utiliser les développements limités suivants en 0 :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ et } \ln(1+t) = t + o(t).$$

Comme $\cosh(0) - 1 = 0$, on obtient ainsi par composition des développements limités au voisinage de 0,

$$\ln(\cosh x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ et donc } \ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{2n^2}.$$

Remarque : pour justifier l'équivalent ci-dessus, il est également possible de ne raisonner ici qu'avec des équivalents (ou un mixte équivalents/DL). En effet, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cosh(1/n) - 1) = 0$ *et* $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$*, on a* $\ln(\cosh(1/n)) \sim \cosh(1/n) - 1$*. Enfin, comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n = 0$ *et* $\cosh(x) - 1 \underset{0}{\sim} x^2/2$*, on a* $\cosh(1/n) - 1 \sim 1/(2n^2)$ *et donc* $\ln(\cosh(1/n)) \sim 1/(2n^2)$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \cosh\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ et par continuité de la fonction exponentielle, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

Exercice 2 Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, et soient $u, v, w \in E$ les suites de terme général $u_n = n$, $v_n = n^2 - 1$ et $w_n = 2^n$. Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

(Barème : 2,5 points)

Solution : Soit α, β et γ trois réels tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = 0$.

Pour $n = 0$, on obtient $0 = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 = -\beta + \gamma$ donc $\beta = \gamma$.

Pour $n = 1$, on obtient $0 = \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = \alpha + 2\gamma$, donc $\alpha = -2\gamma$.

Enfin, pour $n = 2$, on a $0 = \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = -4\gamma + 3\gamma + 4\gamma = 3\gamma$, donc $\gamma = 0$, puis $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Conclusion : la famille (u, v, w) est libre.

Exercice 3

(Barème : 7 points)

1. Démontrer que l'ensemble $P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x - y - 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

   On ne pourra pas utiliser de résultat général sur les sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ définis comme ensemble de solutions d'un système.

   Solution : Notons que P_1 est par définition une partie de $\mathbf{R}^3$.

   $(0, 0, 0) \in P_1$ car $0 - 0 - 2 \times 0 = 0$.

   Soit λ un réel et $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de P_1.

   Alors $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$.

   Vérifions que $\lambda u + v \in P_1$, c'est-à-dire que ses coordonnées satisfont l'équation :

   $$(\lambda x + x') - (\lambda y + y') - 2(\lambda z + z') = \lambda(x - y - 2z) + (x' - y' - 2z') = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

   car u et v sont dans P_1.

   On a ainsi montré que P_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

   Remarque : on aurait pu montrer directement que P_1 est un sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs, ce que l'on fait dans la question suivante.

2. Déterminer une base et la nature géométrique de P_1.

   Solution :

   $$\begin{aligned} P_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x - y - 2z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x = y + 2z\} \\ &= \{(y + 2z, y, z) \colon y, z \in \mathbf{R}\} \\ &= \{y(1, 1, 0) + z(2, 0, 1) \colon y, z \in \mathbf{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (2, 0, 1)) \end{aligned}$$

   Ainsi, $((1, 1, 0), (2, 0, 1))$ est une famille génératrice de P_1. Cette famille est également libre, car c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires puisque $1 \times 0 \neq 1 \times 2$. La famille $((1, 1, 0), (2, 0, 1))$ est donc une base de P_1 et, P_1 est un plan (vectoriel), sous-espace vectoriel de dimension 2.

   (Barème : 3 points pour les questions 1 et 2)

3. On admettra que l'ensemble $P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x - 2y - z = 0\}$ est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Donner, sans justifier cette fois-ci, une base et la nature géométrique de P_2.

   Solution : P_2 est un également un plan, qui a pour base $((2, 1, 0), (1, 0, 1))$ (échange du rôle des seconde et troisième coordonnée).

   (Barème : 1 point)

4. On pose $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon (x - y - 2z)(x - 2y - z) = 0\}$.

   (a) Montrer que $U = P_1 \cup P_2$.

   Solution : Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Alors,

   $$\begin{aligned} u \in U \quad &\text{si et seulement si} \quad (x - y - 2z)(x - 2y - z) = 0 \\ &\text{si et seulement si} \quad (x - y - 2z) = 0 \text{ ou } (x - 2y - z) = 0 \\ &\text{si et seulement si} \quad u \in P_1 \text{ ou } u \in P_2 \\ &\text{si et seulement si} \quad u \in P_1 \cup P_2. \end{aligned}$$

   On a donc vérifier que $U = P_1 \cup P_2$.

   (Barème : 1 point)

   (b) Est-ce que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?

   Solution : Considérons $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = u + v$. On a $u \in P_1$ donc $u \in U$. On a $v \in P_2$ donc $v \in U$. Par contre, $w = (2, 1, 1)$ et $(2-1-2\times1)(2-2\times1-1) = 1 \neq 0$ donc $w \notin U$. La partie U n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

Remarque : on a vu en TD que l'union de sous-espace vectoriel ne peut être un sous-espace vectoriel qu'uniquement si l'un d'entre eux est inclus dans l'autre. Ce ne peut pas être le cas de deux plans distincts.

(Barème : 1 point)

5. Montrer que $D = \text{Vect}((1,1,1))$ est un supplémentaire de P_1 dans $\mathbf{R}^3$.

   Solution : Notons que $D = \text{Vect}((1,1,1))$ est une droite car $(1,1,1) \neq (0,0,0)$. On a ainsi

   $$\dim(D) + \dim(P_1) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbf{R}^3).$$

   Pour montrer que D et P_1 sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$, il suffit alors de vérifier que $D \cap P_1 = \{0,0,0\}$: soit $u \in D \cap P_1$. Comme $u \in D$, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $u = \alpha(1,1,1) = (\alpha, \alpha, \alpha)$. Comme $u \in P_1$, on a $\alpha - \alpha - 2\alpha = 0$ donc $-2\alpha = 0$ et ainsi $\alpha = 0$, ce qui permet de conclure.

   Remarque : ici, comme D est la **droite** *engendrée par $(1,1,1)$ il suffisait de vérifier que $(1,1,1) \notin P_1$ pour en déduire que $D \cap P_1 = \{0,0,0\}$.*

   (Barème : 1 point)

Exercice 4 (Barème : 7,5 points)

On considère u_1, u_2 et u_3 trois vecteurs d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, tels que u_1 et u_2 sont non colinéaires.

On pose

$$v_1 = -u_1 + u_2 + u_3, \quad v_2 = u_1 - u_2 + u_3, \quad v_3 = u_1 + u_2 - u_3 \quad \text{et} \quad v_4 = u_1 + 2u_2 + 3u_3.$$

On note F et G les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par (u_1, u_2, u_3) et par (v_1, v_2, v_3, v_4).

1. Justifier que $G \subseteq F$ et $2 \leqslant \dim F \leqslant 3$.

   Solution : Comme les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 appartiennent à $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$, on a

   $$G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subseteq \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = F.$$

   Comme F est engendré par une famille constituée de 3 vecteurs, $\dim(F) \leqslant 3$.

   Enfin, $\dim F \geqslant 2$ car F contient deux vecteurs u_1 et u_2 qui, par hypothèse, sont non colinéaires.

   (Barème : 2 points)

2. Est-ce que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) peut être libre ?

   Solution : Comme $G \subseteq F$ et $\dim(F) \leqslant 3$, on a $\dim G \leqslant 3$. Dans un sous-espace vectoriel de dimension au plus 3, une famille de 4 vecteurs est forcément liée. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) de G est donc liée.

   (Barème : 1 point)

3. On suppose pour cette question que $\dim F = 3$.

   (a) Justifier que (u_1, u_2, u_3) est libre.

   Solution : (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de F constituée de 3 vecteurs, donc si $\dim F = 3$, cette famille est une base de F et elle est donc en particulier libre.

   (Barème : 0,5 point)

   (b) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est libre.

   Solution : Soit α, β et γ trois réels tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. Alors,

   $$\alpha(-u_1+u_2+u_3)+\beta(u_1-u_2+u_3)+\gamma(u_1+u_2-u_3) = (-\alpha+\beta+\gamma)u_1+(\alpha-\beta+\gamma)u_2+(\alpha+\beta-\gamma)u_3 = 0.$$

Puisque (u_1, u_2, u_3) est libre, on en déduit que (α, β, γ) satisfait le système suivant

$$(S)\begin{cases} -\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha-\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta-\gamma=0 \end{cases}.$$

On a

$$(S) \iff \begin{cases} \alpha-\ \beta-\ \gamma=0 \\ \qquad\quad 2\gamma=0 \\ \quad 2\beta \qquad =0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \qquad\quad =0 \\ \qquad\quad \gamma=0 \\ \quad \beta \qquad =0 \end{cases}$$

Ainsi, $\alpha=\beta=\gamma=0$ et on a montré que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

(Barème : 1 point)

(c) En déduire que $G=F$.

Solution : Comme G contient la famille libre (v_1, v_2, v_3) constituée de 3 vecteurs, on a $3 \leqslant \dim G$. De plus, par (1), $G \subseteq F$ et $\dim F = 3$, donc $\dim G = \dim F$ et $G = F$.

(Barème : 1 point)

4. On suppose pour cette question que $\dim F = 2$.

(a) Donner une base de F.

Solution : La famille (u_1, u_2) constituée de 2 vecteurs non colinéaires par hypothèse, est libre. Puisque c'est une famille de F et que l'on suppose que $\dim F = 2$, cette famille est une base de F.

(Barème : 1 point)

(b) Calculer v_1+v_3 et v_2+v_3 et en déduire que $F=G$.

Solution : On sait par (1) que $G \subseteq F$. On a $v_1+v_3 = 2u_2$ et $v_2+v_3 = 2u_1$, donc u_1 et u_2 appartiennent à $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ qui est inclus dans G. Ainsi, la famille (u_1, u_2) est une famille de vecteurs de G. D'après la question précédente, c'est une famille génératrice de F, donc $F \subseteq G$, ce qui permet de conclure.

(Barème : 1 point)