Feuille n° 10
Équations différentielles

Exercice 1 Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$
2. $y' + y = 2\sin x$
3. $y' - y = (x+1)e^x$
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0; +\infty[$
2. $y' - y = x^k e^x$ sur $\mathbf{R}$, avec $k \in \mathbf{N}$
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 3 (∗) On considère l'équation différentielle (E) $x^2y' + y = 2x^3 + x^2 + 2$ sur $\mathbf{R}$.

1. Chercher une solution particulière polynomiale de (E).
2. Résoudre (E) sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$.
3. Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbf{R}$?

Exercice 4 Reprendre les questions de l'exercice précédent avec l'équation (E) $2xy' - 3y = x - 1$.

Exercice 5 Résoudre, en $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable deux fois, les équations différentielles suivantes.

(a) $f'' - 3f' + 2f = 0$
(b) $f'' + 4f = 0$
(c) $f'' + 2f' + 2f = 0$ (∗)
(d) $f'' + 2f' + f = t$
(e) $f'' + f' - 2f = e^t$ (∗)
(f) $f'' + 2f' + 2f = \sin t$ (∗)
(g) $f'' + f = 1 + \cos(2t)$
(h) $f'' + f' + f = te^t$.

Pour les équations (a), (b) et (h), donner la solution qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 6 (∗) Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ dérivables telles que

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Exercice 7 Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbf{R}$ pour lesquelles le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} f''(t) + \lambda f(t) = 0, \ t \in \mathbf{R}, \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

admet des solutions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ non identiquement nulles et calculer ces solutions.

Exercice 8 Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ f''(t) + f(t) = \tan t. \tag{1}$$

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
   (a) Justifier qu'il existe $u \in \mathcal{C}^2(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ tel que pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f(t) = \cos t\, u(t)$.
   (b) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si u est solution de

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \cos t\, u''(t) - 2\sin t\, u'(t) = \tan t. \tag{2}$$

2. Résoudre, en $v :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$ dérivable, l'équation différentielle

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \cos t\, v'(t) - 2\sin t\, v(t) = \tan t.$$

3. En utilisant le changement de variable $x = \sin t$, déterminer les primitives de $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. Résoudre, en $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$, l'équation différentielle (1).

Exercice 9 (∗) Déterminer les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = f(2-x)$$

Le saviez-vous ? Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité (en un certain sens) d'une solution à l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ vérifiant une condition initiale donnée, pourvu que certaines conditions sur f soient vérifiées. On doit à Augustin Louis Cauchy (1789-1857) une première version de ce théorème vers 1820, qui fut raffiné par Rudolf Lipschitz (1832-1903) en 1868.