Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024
Cursus préparatoire — Analyse 2 24 juin 2024

Session 2
Durée : 1h

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Exercice 1 *Question de cours*

Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ avec $a \neq 0$. Quelles sont les solutions réelles de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$?

Exercice 2

Calculer la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^3}{(X^2 - 4X + 4)(X^2 + 4)}.$$

Exercice 3

Pour $x \in]0, 2\pi[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1 - \cos x}$. Déterminer la limite de $f(x) - \dfrac{2}{x^2}$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 4

Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle $(E) : 2xy' - y = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$.

Exercice 5

On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1 + x^2}}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbf{N}$.

1. (a) Calculer a_1.
   (b) À l'aide du changement de variable $x = \operatorname{sh} u$, calculer a_0. *On rappelle que la fonction* Argsh*, réciproque de* sh *sur* $\mathbf{R}$*, est donnée par* $\operatorname{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}$.
2. (a) Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}(n + 1)} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n + 1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n$.