Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024
Cursus préparatoire — Analyse 2 24 juin 2024

Session 2 – Corrigé

Exercice 2
La fraction F est sous forme irréductible, et la factorisation de son dénominateur en irréductibles sur $\mathbf{R}$ est $(X-2)^2(X^2+4)$. De plus, puisque $\deg F < 0$, la partie entière dans la décomposition en éléments simples de F est nulle. Il existe donc $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tels que

$$F(X) = \frac{X^3}{(X-2)^2(X^2+4)} = \frac{a}{(X-2)^2} + \frac{b}{X-2} + \frac{cX+d}{X^2+4}.$$

Si on multiplie cette égalité par $(X-2)^2$ puis que l'on fait $X=2$, on obtient $a=1$. Si on la multiplie par X^2+4 puis que l'on fait $X=2i$, on obtient

$$\frac{-8i}{4(i-1)^2} = c\cdot 2i + d, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 = d + 2ic.$$

On en déduit que $d=1$ et $c=0$. Reste par exemple à évaluer l'égalité précédente en $X=0$, ce qui donne $0 = \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + \frac{d}{4}$. Compte tenu des valeurs de a et d, cela donne $b=1$. La décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de F est donc

$$F(X) = \frac{1}{(X-2)^2} + \frac{1}{X-2} + \frac{1}{X^2+4}.$$

Exercice 3
Commençons par faire un développement asymptotique de $f(x)$ lorsque $x \to 0$. On a

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{1-\cos x} &= \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)} \\
&= \frac{1}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\
&= \frac{2}{x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)} \\
&= \frac{2}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \\
&= \frac{2}{x^2} + \frac{1}{6} + o(1).
\end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{1}{6} + o(1)$, et donc que $f(x) - \dfrac{2}{x^2} \to \dfrac{1}{6}$ quand $x \to 0$.

Exercice 4
Puisque l'on a $2x \neq 0$ pour tout $x \in I$, on peut commencer par écrire que

$$(E) \iff y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{3}\sqrt{x}.$$

Une primitive sur I de $x \mapsto \dfrac{1}{2x}$ est donnée par $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln x$. Ainsi, d'après le cours, les solutions de l'équation homogène $y' - \dfrac{1}{2x}y = 0$ sont les fonctions données par $y_\lambda(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}\ln x} = \lambda\sqrt{x}$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons maintenant, en suivant la méthode de la variation de la constante, une solution particulière de (E) sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)\sqrt{x}$. Pour tout $x \in I$, on a alors $y'(x) = \lambda'(x)\sqrt{x} + \dfrac{\lambda(x)}{2\sqrt{x}}$, de sorte que

$$\begin{aligned}
y'(x) - \frac{1}{2x}y(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x} &\iff \lambda'(x)\sqrt{x} + \frac{\lambda(x)}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}\lambda(x)\sqrt{x} = \frac{1}{3}\sqrt{x} \\
&\iff \lambda'(x) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir $\lambda : x \mapsto \dfrac{x}{3}$. Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda\sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{3},$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.

Exercice 5

1. (a) On a immédiatement $a_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[\sqrt{1+x^2}\Big]_0^1 = \sqrt{2}-1$.

1. (b) Avec le changement de variable $x = \operatorname{sh} u$, on a $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$, d'où

$$a_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\operatorname{Argsh} 1} \frac{\operatorname{ch} u}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}}\,\mathrm{d}u.$$

Or, $\operatorname{Argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{1^2+1}) = \ln(1+\sqrt{2})$ et on sait que $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$, de sorte que $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{ch} u$ (puisque $\operatorname{ch} u > 0$ pour tout u). Il vient donc

$$a_0 = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \mathrm{d}u = \ln(1+\sqrt{2}).$$

2. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2}$, d'où

$$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{x^n}{1},$$

et donc

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, on obtient finalement

$$\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

2. (b) Comme $\dfrac{1}{n+1} \to 0$, les inégalités précédentes et le théorème d'encadrement montrent que $a_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.