Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024
Cursus préparatoire — Analyse 2 2 mai 2024

Contrôle final – Corrigé

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Exercice 2

Pour ce calcul, on part des formules du cours, on simplifie la fraction obtenue puis on utilise la formule $\frac{1}{1+u}$ pour traiter le dénominateur :

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-1+o(x^3)} &= \frac{1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)} \\
&= \left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right) \\
&= \left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right) \\
&= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+\frac{x^2}{6}+o(x^2) \\
&= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2).
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Remarquons que F est sous forme irréductible et que le dénominateur $X(X^2+1)$ est produit d'irréductible sur $\mathbf{R}$. De plus, comme $\deg F < 0$, la partie entière dans la décomposition en éléments simples de F est nulle. Il existe donc $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1}.$$

Si on multiplie cette égalité par X puis que l'on fait $X = 0$, on obtient $a = 1$. Si on la multiplie par X^2+1 puis que l'on fait $X = i$, on obtient

$$\frac{1}{i} = bi + c, \quad \text{c'est-à-dire} \quad -b + ic = 1.$$

On en déduit que $b = -1$ et $c = 0$. La décomposition en éléments simples de F sur $\mathbf{R}$ est donc

$$F(X) = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}.$$

2. Faisons une intégration par parties en posant $u' = \frac{1}{x^2}$ et $v = \operatorname{Arctan} x$, donc $u = -\frac{1}{x}$ et $v' = \frac{1}{1+x^2}$. Cela donne

$$I = \left[-\frac{1}{x}\operatorname{Arctan} x\right]_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}.$$

Or, d'une part

$$\left[-\frac{1}{x}\operatorname{Arctan} x\right]_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{Arctan} 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\sqrt{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}};$$

et d'autre part, d'après la question 1, on a

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2.$$

On a donc bien

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Exercice 4

1. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $(1-t^2)^n \geqslant 0$, ce qui implique directement que $I_n \geqslant 0$.

2. Soit $n \geqslant 1$. D'après l'indication, on a $0 \leqslant 1-t^2 \leqslant e^{-t^2}$ pour tout $t \in [0,1]$, et donc $(1-t^2)^n \leqslant e^{-nt^2}$. On en déduit que

$$I_n \leqslant \int_0^1 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dans l'intégrale de droite, si l'on fait le changement de variable $x = \sqrt{n}t$, on obtient

$$\int_0^1 e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}J_n.$$

On a donc bien $I_n \leqslant \dfrac{J_n}{\sqrt{n}}$.

3. (a) Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $x \in [1, \sqrt{n}]$, on a $x \geqslant 1$, d'où $x^2 \geqslant x$ et donc $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. Cela montre que

$$\int_1^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{\sqrt{n}} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_1^{\sqrt{n}} = e^{-1} - e^{-\sqrt{n}}.$$

3. (b) Découpons l'intégrale J_n :

$$J_n = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + e^{-1} - e^{-\sqrt{n}} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + e^{-1}.$$

Posons $M = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + e^{-1}$. C'est bien un réel positif (indépendant de n) et on a $J_n \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$.

4. En rassemblant les résultats des questions précédentes, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{n}}$. Comme $\dfrac{M}{\sqrt{n}} \to 0$, on en déduit par théorème d'encadrement que $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 5

1. Comme $x+1 \neq 0$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on peut déjà écrire que (E) est équivalente à

$$y' + \frac{x^2+x+1}{x+1}y = \frac{x}{x+1}.$$

Il s'agit donc dans un premier temps de trouver une primitive de $x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x+1}$. Pour cela, cherchons la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{X^2+X+1}{X+1}$. La division euclidienne du numérateur par le dénominateur s'écrit $X^2+X+1 = X(X+1)+1$, d'où

$$\frac{X^2+X+1}{X+1} = X + \frac{1}{X+1}.$$

C'est la décomposition cherchée, et on a ainsi (en remarquant que $x+1>0$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$) :

$$\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln(x+1) + \mathrm{cste}.$$

On sait par le cours que les solutions de $y' + \dfrac{x^2+x+1}{x+1}y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}+\ln(1+x)} = \lambda\frac{e^{-x^2/2}}{1+x},$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.

Cherchons maintenant une solution de l'équation complète par la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire en cherchant une solution sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)\dfrac{e^{-x^2/2}}{1+x}$. On a alors

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lambda'(x)\frac{e^{-x^2/2}}{1+x} + \lambda(x)\frac{-xe^{-x^2/2}(1+x) - e^{-x^2/2}}{(1+x)^2} \\
&= \lambda'(x)\frac{e^{-x^2/2}}{1+x} - \lambda(x)e^{-x^2/2}\frac{1+x+x^2}{(1+x)^2} \\
&= \lambda'(x)\frac{e^{-x^2/2}}{1+x} - \frac{x^2+x+1}{x+1}y(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si pour tout $x > -1$,

$$\lambda'(x)\frac{e^{-x^2/2}}{1+x} = \frac{x}{1+x}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda'(x) = xe^{x^2/2}.$$

Il suffit donc de choisir $\lambda(x) = e^{x^2/2}$, de sorte qu'une solution particulière de (E) est donnée par $y(x) = e^{x^2/2}\dfrac{e^{-x^2/2}}{1+x} = \dfrac{1}{1+x}$. Ainsi, les solutions de E sont les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \dfrac{\lambda e^{-x^2/2}+1}{1+x}$.

2. On a $y_\lambda(0) = 2$ ssi $\lambda + 1 = 2$, c'est-à-dire $\lambda = 1$. Donc la solution vérifiant $y(0) = 2$ est la fonction

$$y_1 : x \mapsto \frac{e^{-x^2/2}+1}{1+x}.$$

3. La question revient à chercher les fonctions y_λ ayant une limite finie en 1^+. Pour déterminer cela, posons $x = -1 + h$, c'est-à-dire $h = x + 1$, de sorte que $x \to -1$ ssi $h \to 0$. Alors

$$y_\lambda(x) = \frac{1}{h}\left(\lambda e^{-\frac{1}{2}(-1+h)^2} + 1\right).$$

Or $e^{-\frac{1}{2}(-1+h)^2} = e^{-1/2}e^{h-\frac{h^2}{2}} = e^{-1/2}e^{h+o(h)} = e^{-1/2}(1 + h + o(h))$, et donc

$$y_\lambda(x) = \frac{\lambda e^{-1/2} + 1 + \lambda e^{1/2}h + o(h)}{h} = \frac{\lambda e^{-1/2}+1}{h} + \lambda e^{-1/2} + o(1).$$

On voit ainsi que $y_\lambda(x)$ possède une limite finie quand $x \to -1$ si et seulement si $\lambda e^{-1/2} + 1 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = -e^{1/2}$. Il n'y a donc qu'une seule solution de (E) prolongeable par continuité en -1, c'est $y_{-e^{1/2}}$.