Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024
Cursus préparatoire — Algèbre 2 25 juin 2024

Session 2
Durée : 1h

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Exercice 1 *Question de cours*

Soient E un espace vectoriel, F, G deux sous-espaces supplémentaires de E et p_F la projection sur F parallèlement à G. Montrer que p_F est une application linéaire.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 3

On considère $F = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + 2z - t = 0\big\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. Déterminer une base de F.
3. Soit $G = \mathrm{Vect}((3, -1, -2, -2), (1, 3, -1, 2))$. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
4. Soit $H = \mathrm{Vect}((1, 1, 2, 1))$. Montrer que F et H sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 4

Soit u l'application définie sur $\mathbf{R}_3[X]$ par $u(P) = (3X + 1)P + (1 - X^2)P'$ pour tout $P \in \mathbf{R}_3[X]$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.
2. Écrire la matrice M de u dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.
3. Déterminer une base du noyau de u.
4. L'application u est-elle surjective ?