Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024
Cursus préparatoire — Algèbre 2 25 juin 2024

Session 2 – Corrigé

Exercice 2

Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $A = 2I_3 + N$. On peut calculer immédiatement

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad N^3 = 0.$$

Par ailleurs, les matrices $2I_3$ et N commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme pour calculer $A^n = (2I_3 + N)^n$. Compte tenu du fait que $N^3 = 0$, on a $N^k = 0$ pour tout $k \geqslant 3$, et donc

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k = 2^n I_3 + n2^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^{n-2}N^2 = 2^n I_3 + n2^{n-1}N + n(n-1)2^{n-3}N^2.$$

En utilisant les écritures explicites de N et N^2, il vient finalement

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 2 \cdot n2^{n-1} + 3n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n2^n + 3n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1. Remarquons déjà que $F \subset \mathbf{R}^4$ et que $\overrightarrow{0} \in F$ puisque $0+0+2\cdot 0 - 0 = 0$. Soient maintenant $\lambda \in \mathbf{R}$, ainsi que $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de F. On a alors $\lambda X + X' = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$ et

$$(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') - (\lambda t + t') = \lambda(x + y + 2z - t) + (x' + y' + 2z' - t').$$

Ces deux dernières parenthèses valent 0 puisque $X, X' \in F$. On a donc $(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') - (\lambda t + t') = 0$, ce qui montre que $\lambda X + X' \in F$.
On a donc montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

2. Puisque $x + y + 2z - t = 0 \iff t = x + y + 2z$, on a immédiatement

$$\begin{aligned} F = \{(x, y, z, x + y + 2z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\} &= \{x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 2) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3), \end{aligned}$$

où $e_1 = (1, 0, 0, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, 0, 1, 2)$. Cela montre que (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de F. C'est aussi une famille libre car si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$, on a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) = (0, 0, 0, 0)$, d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Tout cela montre que (e_1, e_2, e_3) est une base de F.

3. On peut remarquer que $(3, -1, -2, -2) \in F$ car $3 - 1 - 2 \cdot 2 + 2 = 0$ et $(1, 3, -1, 2) \in F$ car $1 + 3 - 2 - 2 = 0$. Par conséquent, $G \subset F$ et donc $F \cup G = F$. D'après la question précédente, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

4. D'après la question 2, F est de dimension 3, et on a $\dim H = 1$. Ainsi, on a $\dim F + \dim H = 4 = \dim \mathbf{R}^4$. Pour montrer que F et H sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$, il reste donc à montrer que $F \cap H = \{0\}$. Or, soit $X \in F \cap H$. Puisque $X \in H$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $X = (\lambda, \lambda, 2\lambda, \lambda)$. Ensuite, puisque $X \in F$, on a $\lambda + \lambda + 2 \cdot 2\lambda - \lambda = 0$, d'où $\lambda = 0$ puis $X = 0$. On a donc montré que $F \cap H \subset \{0\}$, et l'inclusion réciproque est évidente. On a donc montré que F et H sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 4

1. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $P, Q \in \mathbf{R}_3[X]$. On a alors

$$\begin{aligned}
u(\lambda P + Q) &= (3X+1)(\lambda P + Q) + (1 - X^2)(\lambda P + Q)' \\
&= (3X+1)(\lambda P + Q) + (1 - X^2)(\lambda P' + Q') \\
&= \lambda\left((3X+1)P + (1-X^2)P'\right) + \left((3X+1)Q + (1-X^2)Q'\right) \\
&= \lambda u(P) + u(Q).
\end{aligned}$$

Cela montre que u est une application linéaire. Pour montrer que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$, il reste à montrer que si $P \in \mathbf{R}_3[X]$, alors $u(P) \in \mathbf{R}_3[X]$. Pour un tel P, on a $\deg((3X+1)P) = 1 + \deg P \leqslant 4$ et $\deg(1-X^2)P' = 2 + \deg P' \leqslant 4$, donc $\deg u(P) \leqslant 4$. Or, si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, le coefficient de X^4 dans

$$u(P) = (3X+1)(aX^3 + bX^2 + cX + d) + (1 - X^2)(3aX^2 + 2bX + c)$$

est égal à $3a - 3a = 0$. Il ne reste donc que des termes de degré $\leqslant 3$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

2. On calcule $u(1) = 3X + 1$, $u(X) = 2X^2 + X + 1$, $u(X^2) = X^3 + X^2 + 2X$ et $u(X^3) = X^3 + 3X^2$, et on en déduit que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Échelonnons M en lignes. Tous calculs faits, cela donne

$$M \to \cdots \to M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et $\xi = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$. On sait d'après le cours que $P \in \ker u$ si et seulement $M\xi = \overrightarrow{0}$, si et seulement si $M'\xi = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} d - a = 0 \\ c + a = 0 \\ b + a = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} d = a \\ c = -a \\ b = -a. \end{cases}$$

Ainsi, $P \in \ker u$ si et seulement si P est de la forme $P = aX^3 - aX^2 + aX + a = a(X^3 - X^2 - X + 1)$, avec $a \in \mathbf{R}$. Ainsi, $\ker u = \mathrm{Vect}((X^3 - X^2 + X + 1)$, et $(X^3 - X^2 - X + 1)$ est donc une base de $\ker u$.

4. Comme u est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, on sait qu'il est surjectif si et seulement s'il est injectif. D'après la question précédente, on a $\ker u \neq \{0\}$, donc u n'est pas injectif. Par conséquent, il n'est pas surjectif.