Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2023-2024
Cursus préparatoire — Algèbre 2 — 6 mai 2024

Contrôle final
Durée : 1 h 30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Exercice 1 *Question de cours*
Soient E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que u est injective si et seulement si $\ker u = \{0\}$.

Exercice 2
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que $E = \{M \in M_3(\mathbf{R}) \mid {}^tM = 3M\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbf{R})$.
2. Montrer que l'application $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ par
$$u(x, y) = (2x + 7y, -y, x - y)$$
est une application linéaire.

Exercice 3
Déterminer une base de l'espace $\mathscr{S}$ des solutions du système

$$(S) \quad \begin{cases} 2x - y + t = 0 \\ x + y + z + 2t = 0 \\ 4x - 5y - 2z - t = 0 \\ 4x + y + 2z + 5t = 0. \end{cases}$$

Exercice 4
Étant donnés deux réels distincts a, b, on définit $P_0 = (X - a)^2$, $P_1 = (X - a)(X - b)$ et $P_2 = (X - b)^2$. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 5
Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère aussi $E = \ker(u - \mathrm{id})$ et $F = \ker(u + \mathrm{id})$.

1. (a) Donner la matrice de $u - \mathrm{id}$ dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Vérifier que $\mathrm{rg}(u - \mathrm{id}) = 2$ puis que $\dim E = 2$.
2. (a) Calculer M^2.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subset F$.
3. (a) Montrer que $E \cap F = \{0\}$.
   (b) En déduire que $\dim F \leqslant 2$.
4. Déduire des questions précédentes que $\dim F = 2$.
5. (a) Montrer que $E \oplus F = \mathbf{R}^4$.
   (b) Soient $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base de E et $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ une base de F, de sorte que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ soit une base de $\mathbf{R}^4$. Écrire la matrice de u dans $\mathscr{B}'$.