

### Feuille n° 8 : Applications linéaires

**Exercice 1** Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1.  $f_1 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $f_1(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z + 1)$ .
2.  $f_2 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_2(x, y, z) = x + y + z$ .
3.  $f_3 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_3(x, y, z) = xyz$ .
4.  $f_4 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $f_4(x, y) = (\sin x, \cos y)$ .
5.  $f_5 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $f_5(x, y, z) = (y, z, z)$ .
6.  $f_6 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $f_6(x, y, z) = (10, 11, 12)$ .
7.  $f_7 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_7(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .
8.  $f_8 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $f_8(x) = (x, 2x, -3x)$ .

**Exercice 2** Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1.  $\varphi_1 : \mathbf{R}_2[X] \rightarrow \mathbf{R}_2[X]$ ,  $\varphi_1(P) = (2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X)$ .
2.  $\varphi_2 : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\varphi_2((u_n)_{n \geq 0}) = (u_0, u_1)$ .
3.  $\varphi_3 : \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ ,  $\varphi_3((u_n)_{n \geq 0}) = (u_{n+1} - u_n)_{n \geq 0}$ .
4.  $\varphi_4 : C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ,  $\varphi_4(f) = \left[ x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \right]$ .
5.  $\varphi_5 : C^0([0, 1], \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\varphi_5(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2} dt$ .

**Exercice 3** Soit  $f$  l'application de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}^5$  définie pour tous  $\alpha, \beta$  réels par

$$f(\alpha, \beta) = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Déterminer  $\ker f$  et préciser sa dimension.
3. Déterminer  $\text{Im } f$  et préciser sa dimension.

**Exercice 4**

1. Déterminer l'ensemble des applications linéaires surjectives de  $\mathbf{C}^4$  sur  $\mathbf{C}^6$ .
2. Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de  $\mathbf{C}^4$  dans  $\mathbf{C}^3$ .
3. Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}^3$ .

**Exercice 5** On note  $E = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  et on y définit les applications  $\varphi, \psi$  par

$$\varphi(f) = f' \quad \text{et} \quad \psi(f) = \left[ x \mapsto \int_0^x f(t) dt \right].$$

1. Montrer que  $\varphi$  et  $\psi$  sont des endomorphismes de  $E$ , puis déterminer  $\varphi \circ \psi$  et  $\psi \circ \varphi$ .
2. Les endomorphismes  $\varphi$  et  $\psi$  sont-ils injectifs ? surjectifs ?

**Exercice 6** Dans  $\mathbf{R}^3$ , on considère les vecteurs

$$u = (2, 1, -1), \quad v = (1, -1, 3), \quad w = (3, 3, -5).$$

On note  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $(u, v, w)$ .

1. Déterminer une base de  $F$ .
2. Soit  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'application définie pour des réels  $\alpha, \beta, \gamma$  par

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$

Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbf{R}^3$ .

3. Déterminer une base de  $\ker f$  et une base de  $\text{Im } f$ . Préciser le rang de  $f$ .
4. A-t-on  $\mathbf{R}^3 = \ker f \oplus \text{Im } f$  ?
5. Les vecteurs  $u, v, w$  sont-ils des éléments de  $\text{Im } f$  ?
6. Déterminer une base et la dimension de  $F \cap \text{Im } f$ .

**Exercice 7** Dans chacun des cas suivants, déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire  $g : E \rightarrow E$ .

1.  $E = \mathbf{R}^3$ ,  $g(x, y, z) = (x - y, -x + y, 0)$ .
2.  $E$  est un espace vectoriel de base  $(e_1, e_2, e_3)$ , et  $g$  est l'unique application linéaire qui vérifie  $g(e_1) = e_2$ ,  $g(e_2) = e_3$  et  $g(e_3) = e_1 + e_2$ .

**Exercice 8** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$  défini par  $u(a, b, c) = (-b + 2c, 2a - 3b + 4c, a - b + c)$ , et soit  $v = u + \text{id}$ .

1. Déterminer une base de  $\ker u$ .
2. Quel est le rang de  $u$ ? Déterminer une représentation cartésienne de  $\text{Im } u$ .
3. Quel est le rang de  $v$ ? Quelle est la dimension de  $\ker v$ ?
4. Montrer que pour tout  $x \in \ker v$ , on a  $u(x) = -x$ . En déduire que  $\ker v \subset \text{Im } u$ , puis que  $\ker v = \text{Im } u$ .
5. Montrer que  $\ker u \cap \ker v = \{0\}$ .
6. Montrer que pour tout  $x \in \ker u$ , on a  $u^3(x) = u(x)$ , et que pour tout  $x \in \ker v$ , on a  $u^3(x) = u(x)$ . On rappelle que par définition,  $u^3$  est égal à  $u \circ u \circ u$ .
7. Montrer que  $u^3 = u$ .

**Exercice 9 (\*)** Soit  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (-x + 2y + z, y + 3z, 2x - 2y + 4z)$ .

1. Donner une base de l'image et une base du noyau de  $f$ . Décrire l'image de  $f$  par un système d'équations linéaires.
2. Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$  d'équation  $x = y$ . Quelle est la dimension de  $E$ ? Donner une base de  $f(E)$  et une base de  $f^{-1}(E)$ .

**Exercice 10** Soit  $u : \mathbf{R}_2[X] \rightarrow \mathbf{R}_2[X]$  définie par  $u(P) = (1 - X^2)P' + 2XP$ .

1. Vérifier que  $u$  est bien à valeurs dans  $\mathbf{R}_2[X]$ .
2. Montrer que  $u$  est une application linéaire. Est-elle injective? surjective?
3. Soit  $P_1(X) = (X + 1)^2, P_2(X) = X^2 - 1$  et  $P_3(X) = (X - 1)^2$ . Vérifier que  $(P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbf{R}_2[X]$ . Exprimer  $u(P_1), u(P_2)$  et  $u(P_3)$  comme combinaisons linéaires de  $P_1, P_2$  et  $P_3$ . En déduire la matrice de  $u$  dans la base  $(P_1, P_2, P_3)$ .

**Exercice 11** Soit  $a_0, \dots, a_n$  des réels distincts et  $\varphi : \mathbf{R}_n[X] \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

1. Montrer que  $\varphi$  est injective.
2. Montrer que pour tout  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ , il existe un unique polynôme  $P \in \mathbf{R}_n[X]$  tel que  $P(a_i) = x_i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ .
3. (\*) Comment montrer que pour tout  $(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^{2n+2}$ , il existe un unique polynôme  $P \in \mathbf{R}_{2n+1}[X]$  tel que  $P(a_i) = x_i$  et  $P'(a_i) = y_i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ ?

**Exercice 12 (\*)** Soit  $E = \mathbf{R}_n[X]$  et soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels tous distincts.

1. Vérifier que pour tout  $i$ ,  $\varphi_{a_i} : P \mapsto P(a_i)$  est une forme linéaire sur  $E$ .
2. Montrer que la famille  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  est libre. *On pourra, à un moment, utiliser le résultat de la question 2 de l'exercice précédent.*
3. Montrer qu'il existe un unique  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$  tel que

$$\forall P \in E, \int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(a_i).$$

**Exercice 13** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire.

1. Montrer que  $\ker u \subset \ker(u^2)$  et  $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im } u$ .
2. Montrer que  $\ker u \oplus \text{Im } u = E \Leftrightarrow \text{Im } u \cap \ker u = \{0\}$ .
3. Montrer que  $\ker u \oplus \text{Im } u = E \Leftrightarrow \text{Im } u = \text{Im } u^2 \Leftrightarrow \ker u = \ker u^2$ .

4. Dire si  $\text{Im } u$  et  $\ker u$  sont supplémentaires dans  $E = \mathbf{R}^3$  dans les deux cas suivants :  $u(x, y, z) = (x - 2y + z, x - z, x - 2y + z)$ ;  $u(x, y, z) = (2(x + y + z), 0, x + y + z)$ .

**Exercice 14 (\*)** Soient  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^2 \neq 0$  et  $u^3 = 0$ .

1. Montrer que  $\dim \ker u$  ne peut être égal ni à 0, ni à 3.
2. En supposant que  $\dim \ker u = 2$ , montrer que  $\ker u = \ker u^2$ , puis que  $u^2 = 0$ .
3. Que vaut  $\dim \ker u$ ?

**Exercice 15** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace  $E$  tel que  $u^2 - 3u + 2\text{id} = 0$ .

1. Montrer que  $u$  est inversible et exprimer  $u^{-1}$  en fonction de  $u$ .
2. Montrer que  $E = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u - 2\text{id})$ .

**Exercice 16 (\*)** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^{n-1} \neq 0$  et  $u^n = 0$ . On considère  $x \in E$  tel que  $u^{n-1}(x) \neq 0$ . Montrer que la famille  $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .

*Le saviez-vous?* Vers 1844, le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805-1865) effectue des recherches sur les quaternions, qu'il définit comme des nombres de la forme  $a + bi + cj + dk$  avec  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  et  $i, j, k$  vérifiant  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ . Hamilton distingue la partie réelle  $a$  et la partie imaginaire  $bi + cj + dk$  d'un tel quaternion. La première est appelée « scalaire » ou « partie scalaire » car elle peut prendre toutes les valeurs sur une échelle de progression allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . La deuxième est appelée « vecteur » ou « partie vectorielle » car elle correspond à un segment de l'espace, qui était autrefois aussi appelé « vecteur rayon » en géométrie et en astronomie.