Feuille n° 6 : Fractions rationnelles

Exercice 1 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$A(X)=\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}\quad;\quad B(X)=\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}\quad;\quad C(X)=\frac{1}{X(X-1)^2}$$

$$D(X)=\frac{4}{(X^2-1)^2}\quad;\quad E(X)=\frac{1}{X^4-1}\quad;\quad F(X)=\frac{1}{X^n(X-1)}.$$

Exercice 2 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{C}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$A(X)=\frac{1}{X^2+X+1}\quad;\quad B(X)=\frac{X}{(X-1)(X^2+1)^2}$$

$$C(X)=\frac{1}{(X+1)(X^3+1)}\quad;\quad D(X)=\frac{P(X)}{X^n-1},\quad \text{où}\quad P\in\mathbf{C}_{n-1}[X].$$

Exercice 3
Décomposer la fraction $\dfrac{1}{X^{2n}+1}$ en éléments simples sur $\mathbf{C}$ puis sur $\mathbf{R}$.

Exercice 4

1. En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{1}{X(X+1)}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.
2. Calculer de manière analogue les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\quad;\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+k^2+k^4}\quad;\quad \sum_{k=3}^{n}\frac{2k-1}{k(k^2-4)}.$$

Exercice 5 ($*$)
Calculer la dérivée d'ordre 28 de la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{1}{X(X^2+1)}$.

Exercice 6

1. Soit $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle irréductible de $\mathbf{C}(X)$. Montrer que si a est un pôle simple de F, alors la partie polaire associée à a est $\dfrac{P(a)}{Q'(a)(X-a)}$.
2. Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{C}$ la fraction $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$.

Exercice 7 ($*$)
Soit $n\in\mathbf{N}$. Pour $k\in\mathbf{N}$, on note $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$. Écrire la fraction rationnelle $F(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k^2}{X-\omega_k}$ sous forme irréductible $F(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$.

Exercice 8 ($*$)
On rappelle que $\mathbf{C}[X]$ peut-être vu comme un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}(X)$ grâce à l'identification $P(X)=\dfrac{P(X)}{1}$ pour tout $P\in\mathbf{C}[X]$. Montrer que $V=\{F\in\mathbf{C}(X)\mid \deg F<0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}(X)$, puis montrer que $\mathbf{C}(X)=\mathbf{C}[X]\oplus V$.

Exercice 9 ($*$)
Soit H l'ensemble des fractions rationnelles $F \in \mathbf{C}(X)$ telles que $F\left(\frac{1}{X}\right) = F(X)$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}(X)$.
2. Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{C}(X) & \to & H \\ G & \mapsto & G\left(X + \frac{1}{X}\right) \end{array} \right.$. Montrer que Φ est bien à valeurs dans H, et que c'est une application linéaire injective.
3. L'objectif de cette question est de montrer que Φ est un isomorphisme.
   (a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, il existe $R \in \mathbf{C}[X]$ tel que $R\left(X + \frac{1}{X}\right) = P(X) + P\left(\frac{1}{X}\right)$.
   (b) Soient $F \in H$ et $P, Q \in \mathbf{C}[X]$ tels que $F = \frac{P}{Q}$ soit la forme irréductible de F. Montrer que
$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P\left(\frac{1}{X}\right)}{Q\left(\frac{1}{X}\right)} = \frac{P(X) + P\left(\frac{1}{X}\right)}{Q(X) + Q\left(\frac{1}{X}\right)}.$$
   (c) En déduire que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Le saviez-vous ? On identifie en général les premiers énoncés du théorème de décomposition en éléments simples dans deux textes indépendants de 1702, l'un dû à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) et l'autre à Jean Bernoulli (1667-1748), et tous deux dévolus à la question de l'intégration des fractions rationnelles. Ce théorème a été la source de réflexions de ces mathématiciens sur le théorème fondamental de l'algèbre, qui n'avait pas encore été clairement énoncé à cette époque.