

**Feuille n° 3 : Développements limités, équivalents, formules de Taylor**

**Exercice 1** Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto e^x$  au voisinage de 0.
2.  $x \mapsto \ln x$  au voisinage de 1. En déduire  $\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\ln(1+h)-h}{h^2}$ .
3.  $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$  au voisinage de 2.
4.  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  au voisinage de 0.

**Exercice 2** Soit  $a > 0$ .

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction cosinus, sur l'intervalle  $[0, a]$ . Montrer que l'on a :

$$\left| \cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$

2. En déduire l'encadrement :

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos \frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

**Exercice 3 (\*)** Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction  $t \mapsto \sqrt{t}$  entre 25 et 26. En déduire une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $\sqrt{26}$ .

**Exercice 4 (\*)** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que  $f$  et  $f''$  sont bornées sur  $\mathbf{R}$  et on note  $M_0 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$  et  $M_2 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f''(x)|$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , tout  $h > 0$ , on a

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2.$$

2. En déduire que  $f'$  est bornée sur  $\mathbf{R}$  et que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

**Exercice 5** On considère les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbf{R}$  par : pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = x^4 + x^3 - x, \quad g(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 + 1, \quad h(x) = (x-1)^3.$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de chacune de ces fonctions.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $f$ .
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de  $f$  et de  $h$ .
4. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $f+g$ .
5. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $fg$ .
6. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\frac{1}{g}$ .

**Exercice 6** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de 0, et quatre fois dérivables au voisinage de 0 dont les développements limités en 0 à l'ordre 4 sont donnés par

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4), \\ g(x) &= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

1. Donner les valeurs de  $g''(0)$  et  $f^{(4)}(0)$ .
2. Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :

- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| (a) $fg$ à l'ordre 3,          | (d) $\ln f$ à l'ordre 2,                              |
| (b) $\frac{g}{f}$ à l'ordre 3, | (e) la primitive de $f$ qui vaut 1 en 0, à l'ordre 4. |
| (c) $f \circ g$ à l'ordre 2,   |   |

**Exercice 7** On pose  $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ . Donner un équivalent simple de  $f$  lorsque  $x$  tend vers 0,  $+\infty$ , 2, et 1.

**Exercice 8** Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en 0 et en  $+\infty$  :

- |                                     |                                  |                                     |
|-------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $f_1(x) = x + \cos x$ ,          | 4. $f_4(x) = x + \sin x$ ,       | 7. $f_7(x) = x^4 + e^x$ ,           |
| 2. $f_2(x) = x^2 + \sin x$ ,        | 5. $f_5(x) = \sqrt{x} + \ln x$ , | 8. $f_8(x) = e^{2x} - \sqrt{x}$ ,   |
| 3. $f_3(x) = \operatorname{sh} x$ , | 6. $f_6(x) = xe^x$ ,             | 9. $f_9(x) = \operatorname{ch} x$ . |

**Exercice 9** Étudier la limite de  $f$  en  $a$  lorsque

- |  |  |
|--|--|
| (a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x(x-3)}$ et $a = +\infty$ ,                    | (d) $f(x) = \frac{x^2 + 3 \ln(x)}{2x^2 \sqrt{1+x}}$ et $a = +\infty$ , |
| (b) $f(x) = (\pi - 2x) \tan(x)$ et $a = \frac{\pi}{2}$ ,                       | (e) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - 1}$ et $a = e$ .       |
| (c) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x^2} - \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^4 + x^3}}$ et |  |

**Exercice 10** Établir pour chacune des fonctions  $f$  proposées ci-dessous un développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre  $n$  proposé :

- |  |  |
|--|--|
| (a) $f(x) = e^{-x}$ et $n = 5$ ,                         | (g) (*) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ et $n = 6$ ,             |
| (b) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ et $n = 4$ ,                | (h) (*) $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ et $n = 7$ ,     |
| (c) $f(x) = \frac{1}{2+x}$ et $n = 3$ ,                  | (i) (*) $f(x) = e^{3x} \sin(2x)$ et $n = 4$ ,          |
| (d) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}$ et $n = 2$ ,    | (j) (*) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ et $n = 3$ , |
| (e) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ et $n = 3$ ,                    | (k) (*) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ et $n = 3$ .     |
| (f) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{1+x}\right)$ et $n = 4$ , |  |

**Exercice 11** Calculer les limites suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$          | (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ , $a \in \mathbb{R}^*$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$ | (f) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$           |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$                     | (g) (*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$     |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$    | (h) (*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}$ .       |

**Exercice 12 (\*)** On définit les fonctions

$$f : x \in ]-1, 1[ \mapsto \ln(1 - x^2) \text{ et } g : x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 1.$$

- Déterminer les développements limités de  $f$  et de  $g$  à l'ordre 5 quand  $x \rightarrow 0$ .
- En déduire l'existence d'un réel  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in ]-\eta; 0[ \cup ]0; \eta[$ ,

$$f(x) < g(x).$$

**Exercice 13** On considère la fonction  $f : x \in ]-1, +\infty[ \setminus \{0\} \mapsto \frac{\sin x}{\ln(1+x)}$ .

- Calculer le développement limité de  $f$  à l'ordre 2 au voisinage de 0.
- Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite de l'exercice, on notera encore  $f$  la fonction ainsi prolongée.
- Quelle est l'équation de la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse 0 ?
- Quelle est la position du graphe de  $f$  par rapport à cette tangente ?

**Exercice 14** Calculer un développement limité ou asymptotique de  $f$  dans les cas suivants :

- $f(x) = \sqrt{2+x}$  en 0, à l'ordre 3,
- $f(x) = \ln(\sin x)$  en  $\frac{\pi}{2}$ , à l'ordre 3,
- $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$  au voisinage de  $+\infty$  avec trois termes significatifs,
- (\*)  $f(x) = x^2 \ln x$  où  $x$  tend vers 1 et à l'ordre 5,
- (\*)  $f(x) = \ln(2+x)$  en 0, à l'ordre 2,
- (\*)  $f(x) = \sin x$  en  $\frac{\pi}{4}$ , à l'ordre 3,
- (\*)  $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$  au voisinage de  $+\infty$  avec trois termes significatifs.

**Exercice 15** Calculer les limites des suites de terme général

- $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$
- $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}}$
- $u_n = (\sin \frac{1}{n})^{1/n}$
- $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

**Exercice 16**

- Trouver un équivalent simple pour les suites définies par

$$u_n = \sin \frac{1}{n+1} \text{ et } v_n = \ln \sin \frac{1}{n}.$$

- Trouver un développement asymptotique à la précision  $1/n^2$  des suites données par

$$u_n = \ln(n+1) \text{ et } v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Donner aussi un développement à la précision  $1/n$  de la suite donnée par

$$w_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}.$$

*Le saviez-vous ?* On dit usuellement que  $o$ ,  $O$  et  $\sim$  sont les « notations de Landau », du nom du mathématicien allemand Edmund Landau (1877-1938). Elles ont été systématisées dans un livre de 1909 que ce dernier a écrit sur la répartition des nombres premiers. Un des résultats les plus célèbres sur ce sujet est que si  $\pi(x)$  désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à un réel  $x$ , alors

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

C'est ce qu'on appelle le « théorème des nombres premiers », démontré indépendamment par Jacques Hadamard et Charles-Jean de la Vallée Poussin en 1896.