

Feuille n° 3 : Développement limités, équivalents, formules de Taylor

Exercice 1 Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0.
2. $x \mapsto \ln x$ au voisinage de 1. En déduire $\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\ln(1+h)-h}{h^2}$.
3. $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$ au voisinage de 2.
4. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ au voisinage de 0.

Exercice 2 Soit $a > 0$.

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction cosinus, sur l'intervalle $[0, a]$. Montrer que l'on a :

$$\left| \cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$

2. En déduire l'encadrement :

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos \frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Exercice 3 (*) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ entre 25 et 26. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{26}$.

Exercice 4 (*) Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que f et f'' sont bornées sur \mathbf{R} et on note $M_0 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, tout $h > 0$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2.$$

2. En déduire que f' est bornée sur \mathbf{R} et que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 5 On considère les fonctions f, g et h définies sur \mathbf{R} par : pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = x^4 + x^3 - x, \quad g(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 + 1, \quad h(x) = (x-1)^3.$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de chacune de ces fonctions.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f .
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de f et de h .
4. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f + g$.
5. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de fg .
6. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{g}$.

Exercice 6 Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de 0, et quatre fois dérivables au voisinage de 0 dont les développements limités en 0 à l'ordre 4 sont donnés par

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4),$$

$$g(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4).$$

1. Donner les valeurs de $g''(0)$ et $f^{(4)}(0)$.
2. Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :

- | | |
|--------------------------------|---|
| (a) fg à l'ordre 3, | (d) $\ln f$ à l'ordre 2, |
| (b) $\frac{g}{f}$ à l'ordre 3, | (e) la primitive de f qui vaut 1 en 0, à l'ordre 4. |
| (c) $f \circ g$ à l'ordre 2, | |

Exercice 7 On pose $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$. Donner un équivalent simple de f lorsque x tend vers 0, $+\infty$, 2, et 1.

Exercice 8 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$:

- | | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $f_1(x) = x + \cos x$, | 4. $f_4(x) = x + \sin x$, | 7. $f_7(x) = x^4 + e^x$, |
| 2. $f_2(x) = x^2 + \sin x$, | 5. $f_5(x) = \sqrt{x} + \ln x$, | 8. $f_8(x) = e^{2x} - \sqrt{x}$, |
| 3. $f_3(x) = \operatorname{sh} x$, | 6. $f_6(x) = xe^x$, | 9. $f_9(x) = \operatorname{ch} x$. |

Exercice 9 Étudier la limite de f en a lorsque

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x(x-3)}$ et $a = +\infty$, | $a = +\infty$, |
| (b) $f(x) = (\pi - 2x) \tan(x)$ et $a = \frac{\pi}{2}$, | (d) $f(x) = \frac{x^2 + 3 \ln(x)}{2x^2 \sqrt{1+x}}$ et $a = +\infty$, |
| (c) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x^2} - \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^4 + x^3}}$ et | (e) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - 1}$ et $a = e$. |

Exercice 10 Établir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n proposé :

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x) = e^{-x}$ et $n = 5$, | (g) (*) $f(x) = \ln(1+x^2)$ et $n = 6$, |
| (b) $f(x) = \ln(1+\operatorname{sh} x)$ et $n = 4$, | (h) (*) $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ et $n = 7$, |
| (c) $f(x) = \frac{1}{2+x}$ et $n = 3$, | (i) (*) $f(x) = e^{3x} \sin(2x)$ et $n = 4$, |
| (d) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}$ et $n = 2$, | (j) (*) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ et $n = 3$, |
| (e) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ et $n = 3$, | (k) (*) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ et $n = 3$. |
| (f) $f(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{1+x}\right)$ et $n = 4$, | |

Exercice 11 Calculer les limites suivantes :

- | | |
|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, a \in \mathbb{R}^*$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$ | (f) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$ | (g) (*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$ | (h) (*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}$. |

Exercice 12 (*) On définit les fonctions

$$f : x \in]-1, 1[\mapsto \ln(1-x^2) \text{ et } g : x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 1.$$

- Déterminer les développements limités de f et de g à l'ordre 5 quand $x \rightarrow 0$.
- En déduire l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta; 0[\cup]0; \eta[$,

$$f(x) < g(x).$$

Exercice 13 On considère la fonction $f : x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\} \mapsto \frac{\sin x}{\ln(1+x)}$.

- Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite de l'exercice, on notera encore f la fonction ainsi prolongée.
- Quelle est l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 ?
- Quelle est la position du graphe de f par rapport à cette tangente ?

Exercice 14 Calculer un développement limité ou asymptotique de f dans les cas suivants :

- $f(x) = \sqrt{2+x}$ en 0, à l'ordre 3,
- $f(x) = \ln(\sin x)$ en $\frac{\pi}{2}$, à l'ordre 3,
- $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs,
- (*) $f(x) = x^2 \ln x$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5,
- (*) $f(x) = \ln(2+x)$ en 0, à l'ordre 2,
- (*) $f(x) = \sin x$ en $\frac{\pi}{4}$, à l'ordre 3,
- (*) $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs.

Exercice 15 Calculer les limites des suites de terme général

- | | |
|--|---|
| 1. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$ | 3. $u_n = (\sin \frac{1}{n})^{1/n}$ |
| 2. $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}}$ | 4. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ |

Exercice 16

- Trouver un équivalent simple pour les suites définies par

$$u_n = \sin \frac{1}{n+1} \text{ et } v_n = \ln \sin \frac{1}{n}.$$

- Trouver un développement asymptotique à la précision $1/n^2$ des suites données par

$$u_n = \ln(n+1) \text{ et } v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Donner aussi un développement à la précision $1/n$ de la suite donnée par

$$w_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}.$$

Le saviez-vous ? On dit usuellement que o , O et \sim sont les « notations de Landau », du nom du mathématicien allemand Edmund Landau (1877-1938). Elles ont été systématisées dans un livre de 1909 que ce dernier a écrit sur la répartition des nombres premiers. Un des résultats les plus célèbres sur ce sujet est que si $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à un réel x , alors

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

C'est ce qu'on appelle le « théorème des nombres premiers », démontré indépendamment par Jacques Hadamard et Charles-Jean de la Vallée Poussin en 1896.