Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024
Cursus préparatoire : algèbre 2, analyse 2

Feuille n° 2 : Matrices

Exercice 1 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Parmi les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB, lesquels ont un sens ? Les calculer.

Exercice 2 On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et BA. Que remarque-t-on ?

Exercice 3

1. À tout nombre réel t on associe la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$.
   (a) Pour $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, montrer que $A(t_1)A(t_2) = A(t_1 + t_2)$.
   (b) Montrer que $A(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbf{R}$ et calculer $A(t)^{-1}$.
2. Mêmes questions avec la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $AB = AC$; a-t-on $B = C$? A peut-elle être inversible ?
   (b) Déterminer toutes les matrices F telles que $AF = 0$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

Exercice 5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer ensuite que A est inversible et calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 7

1. Soit $m \geqslant 1$ un entier et $A, B \in M_m(\mathbf{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} .$$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geqslant 3$. Idem avec $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 Soit m un réel non nul. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+I)(A-2I)$.
2. Soit $B = \frac{1}{3}(A+I)$ et $C = \frac{1}{3}(A-2I)$. Calculer B^2 et C^2. En déduire une expression simple de B^n et C^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C$.

Exercice 9 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I, A et A^2.
3. Exprimer A^4 et A^5 en fonction de I, A, et A^2.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe a_n, b_n, c_n tels que $A^n = a_n I + b_n A + c_n A^2$.

Exercice 11 Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

Exercice 12 ($*$) Soit A, B deux matrices carrées telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 13 ($*$) Soit n un entier, K un corps et A une matrice telle que pour tout $B \in M_n(K)$ on ait $AB = BA$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda I$.

Exercice 14 Les matrices suivantes sont-elles échelonnées ?

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-12&0\\0&0&47\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\\3&4&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&15&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&4&0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1&1&3\\0&0&-2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Exercice 15 Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée (en lignes) et déterminer une base de leur noyau :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&10&1\\1&2&1&4&7\\1&3&4&13&8\\1&4&2&7&14\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1&-1&2&2\\2&1&-1&2\\1&1&0&2\\0&1&1&2\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}0&0&2&1\\0&1&-1&0\\-1&0&3&1\\0&-1&-2&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 16 Calculer, lorsqu'ils existent, les inverses des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&\bar\alpha&\bar\alpha^2\\\alpha&1&\bar\alpha\\\alpha^2&\alpha&1\end{pmatrix}(\alpha\in\mathbf{C})\qquad\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1\\0&1&\ddots&&\vdots\\&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&\cdots&0&1&1\\0&&\cdots&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&2&\cdots&\vdots\\&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&0&1&2\\0&\cdots&&0&1\end{pmatrix}$$

Exercice 17 Déterminer sous quelles conditions les systèmes suivants admettent une solution :

$$\begin{cases}x-y+2z+2t=a\\2x+y-z+2t=b\\x+y+2t=c\\y+z+2t=d\end{cases};\qquad\begin{cases}y+z=a\\x+z=b\\x+t=c\end{cases}$$

Exercice 18 (∗) Résoudre, en fonction du paramètre $m\in\mathbf{C}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

$$\begin{cases}x-y+z=m\\x+my-z=1\\x-y-z=1\end{cases};\qquad\begin{cases}mx+y+z=1\\x+my+z=m\\x+y+mz=m^2\end{cases};\qquad\begin{cases}mx+y+z+t=1\\x+my+z+t=m\\x+y+mz+t=m+1\end{cases}$$

Exercice 19 Déterminer noyau et image des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&1\\5&6&1\\7&8&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2&2&-1&7\\4&3&-1&11\\0&-1&2&-4\\3&3&-2&11\end{pmatrix}.$$

Exercice 20 (∗)

1. On considère l'application linéaire $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ définie par
$$f(x,y)=(x-y,-3x+3y).$$
Écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et déterminer son noyau et son image.
2. Même question avec $g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ définie par
$$g(x,y,z)=(x-z,2x+y-3z,-y+2z).$$
3. Même question avec $h:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ définie par
$$h(x,y,z,t)=(2x+2y-z+7t,4x+3y-z+11t,-y+2z-4t,3x+3y-2z+11t).$$

Le saviez-vous ? Le terme « matrice » pour désigner les tableaux de nombres a été introduit vers 1850 par James Joseph Sylvester (1814-1897). Il s'agit d'une métaphore organique, renvoyant au fait que les matrices engendrent ce qu'on appelle des déterminants :

> I have [...] defined a "Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent; these cognate determinants being by no means isolated in their relation to one another, but subject to simple laws of mutual dependence and simultaneous deperition. (Sylvester, 1851)

Vous verrez la notion de déterminant en deuxième année, bien qu'elle ait historiquement précédé celle de matrice !