Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024
Cursus préparatoire — Algèbre 2, analyse 2 18 avril 2024

Devoir CUPGE n° 4
Durée : 1 h 30

ATTENTION ! LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE ET LA PRÉSENTATION DE VOTRE COPIE SERONT PRISES EN COMPTE DANS LA NOTATION.

Problème

Dans ce problème, les questions 1.(a) et 1.(b) sont indépendantes de la suite. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.
   (a) Donner l'expression de $u(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
   (b) Chercher une base du noyau de u. Quel est le rang de u ?
2. Calculer A^2 et vérifier que $A^3 = 0$.
3. Montrer que la famille (I_3, A, A^2) est une famille libre.
4. Soit $E = \{aI_3 + bA + cA^2 \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbf{R})$, puis que (I_3, A, A^2) en est une base.
5. On fixe $B = aI_3 + bA + cA^2$ une matrice de E.
   (a) Montrer que l'application φ_B, définie sur E par $\varphi(M) = BM$ pour tout $M \in E$, est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que si B est inversible, alors φ_B est injective.
   (c) Montrer que si φ_B est surjective, alors B est inversible.
   (d) En déduire que B est inversible si et seulement si φ_B est bijective.
   (e) Écrire la matrice de φ_B dans la base (I_3, A, A^2).
   (f) Montrer que cette matrice est inversible si et seulement si $a \neq 0$.
6. Quelles sont les matrices inversibles de E ?

Exercice

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque, et soient f, g, u, v des endomorphismes de E qui commutent deux à deux (c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$, $f \circ u = u \circ f, \dots, u \circ v = v \circ u$) et tels que

$$u \circ f + v \circ g = \mathrm{id}\,.$$

On rappelle que cela signifie que pour tout $x \in E$, on a $u(f(x)) + v(g(x)) = x$.

1. Montrer que $\ker f \subset \ker(f \circ g)$.
2. En déduire que $\ker f + \ker g = \ker(f \circ g)$.
3. Montrer que $\ker f$ et $\ker g$ sont supplémentaires dans $\ker(f \circ g)$.