Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2023-2024

Cursus préparatoire — Algèbre 2, analyse 2 — 4 avril 2024

Devoir CUPGE n° 3
Durée : 1 h 30

ATTENTION ! LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE ET LA PRÉSENTATION DE VOTRE COPIE SERONT PRISES EN COMPTE DANS LA NOTATION.

Exercice

On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de $F(X) = \dfrac{X}{X^3+1}$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u+1}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u$.
3. En déduire que $I = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2\right)$.

Problème

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t$ et $b_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Calculer a_0 et a_1.
   (b) Montrer que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (c) Montrer que $(n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. (a) On rappelle que pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a $t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin t$. Montrer que $0 \leqslant b_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(a_{2n} - a_{2n+2})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $a_{2n+2} = (2n+2)\displaystyle\int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que $\dfrac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$.
   (c) En déduire que $\dfrac{1}{(n+1)^2} = 2\left(\dfrac{b_n}{a_{2n}} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right)$.
   (d) En déduire enfin la limite de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, quand $n \to +\infty$.