
Devoir CUPGE n° 2
Durée : 1 h 30

ATTENTION ! LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE ET LA PRÉSENTATION DE VOTRE COPIE SERONT PRISES EN COMPTE DANS LA NOTATION.

Exercice 1

Déterminer la décomposition en éléments simples sur \mathbf{R} de la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^4}{(X^2 - 4X + 4)(X^2 + 4)}.$$

Exercice 2

On considère les sous-ensembles de $\mathbf{R}_4[X]$ définis par

$$F = \{\alpha X^4 + \beta X^3 + \alpha + \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} \quad \text{et} \quad G = \{P \in \mathbf{R}_4[X] \mid P'(2) = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}_4[X]$.
2. Déterminer une base de F .
3. (a) Pourquoi a-t-on $\dim G \leq 5$? Montrer que l'on a en fait $\dim G \leq 4$.
(b) Montrer que la famille $(1, (X - 2)^2, (X - 2)^3, (X - 2)^4)$ est libre.
(c) En déduire $\dim G$.
4. (a) En utilisant la formule de Grassmann, montrer que $\dim(F \cap G) \geq 1$.
(b) En s'inspirant de la méthode de la question 3a, montrer que $\dim(F \cap G) \leq 1$.
(c) Donner une base de $F \cap G$.

Exercice 3

Soient E un espace vectoriel sur un corps K et F un sous-espace vectoriel de E . Que vaut $\text{Vect}(E \setminus F)$?