Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2023-2024
Cursus préparatoire — Algèbre 2, analyse 2 — 21 février 2024

Devoir CUPGE n° 1
Durée : 1 h 30

ATTENTION ! LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE ET LA PRÉSENTATION DE VOTRE COPIE SERONT PRISES EN COMPTE DANS LA NOTATION.

Exercice 1

On considère les matrices

$$J = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note aussi $M(t) = J + tK + t^2L$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

1. Donner la forme explicite la matrice $M(t)$. Vérifier que $M(1) = I_3$.
2. Montrer que $J^2 = J$ et que $JK = KJ = 0$.
   On admettra qu'on a aussi $K^2 = K$**,** $L^2 = L$ **et** $JL = LJ = KL = LK = 0$**.**
3. Montrer que $M(t)M(u) = M(tu)$ pour tous réels t, u.
4. Déterminer les réels t tels que $M(t)$ est inversible, et donner alors $M(t)^{-1}$.
5. (a) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible. *Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.*
   (b) Vérifier que $M(t)P = PD(t)$, où $D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$.
   (c) En déduire une nouvelle preuve de l'égalité $M(t)M(u) = M(tu)$ pour tous t, u.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^n \ln x}{x^2 - 1}$.

1. (a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 1.
   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 1, et préciser la valeur correspondante de $f(1)$.
   (c) Montrer que le prolongement de f est dérivable en 1 et donner la valeur de $f'(1)$.
   (d) Quelle est l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1 ? Quelle est la position du graphe par rapport à cette tangente au voisinage de 1 ?
2. (a) À quelle condition la fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
   (b) Dans ce cas, le prolongement de f est-il dérivable à droite en 0 ?