Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
L3 Mathématiques pour l'enseignement
Examen. Mai 2023

Séries et intégrales

La durée de totale de l'epreuve est 2h00. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. Démontrer que, si une fonction deux fois dérivable $y\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle
$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \tfrac{1}{4})y(x) = 0, \qquad x > 0 \tag{1}$$
alors la fonction u définie pour $x > 0$ par $u(x) = x^{1/2}y(x)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle de la forme
$$u'' + au' + bu = 0 \qquad \text{(avec } a, b \text{ réels à déterminer).}$$
2. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (1).
3. Démontrer que toutes les solutions de (1) convergent vers 0 pour $x \to +\infty$. Que peut-on dire de la limite pour $x \to 0+$?

Exercice 2.

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Exprimer la limite $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ comme une intégrale.
2. On pose $u_n = \sum_{k=n}^{2n} k^3$. Déduire de la question précédente l'équivalent $u_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{15}{4}n^4$.

Exercice 3. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos^2(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4 (À traiter seulement si l'on maitrise les définitions et les arguments avec ϵ et δ).
Soit $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Démontrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $]0,\infty[$, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
2. Démontrer que si $x_n \to 0+$ alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. (Plus difficile). Démontrer que la fonction f se prolonge à une fonction continue sur $[0,+\infty[$, c'est à dire qu'il existe une fonction continue $\tilde{f}\colon [0,+\infty[$ telle que $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x > 0$.
4. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ n'est pas uniformément continue sur $]0,+\infty[$.

Question de cours.

1. Définition de rayon de convergence d'une série entière.
2. Exemple d'une série entière de rayon de convergence $R = 2$, qui **ne converge pas** normalement dans l'intervalle $]-2,2[$.
3. Exemple d'une série entière de rayon de convergence $R = 2$, qui **converge** normalement dans l'intervalle $]-2,2[$.
4. Démonstration du théorème affirmant que si une série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$, alors la série est normalement convergente dans tout intervalle de type $[-R+\epsilon, R-\epsilon]$ avec $0 < \epsilon < R$.