Exercice 1

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y(x) = 0, \qquad x > 0.$$

Soit $x>0$ et $u(x) = x^{1/2} y(x)$, c.à.d $y(x) = x^{-1/2} u(x)$

$$y'(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2} u(x) + x^{-1/2} u'(x)$$

$$y''(x) = \frac{3}{4} x^{-5/2} u(x) - x^{-3/2} u'(x) + x^{-1/2} u''(x)$$

Donc $0 = \cancel{\frac{3}{4} x^{-1/2} u(x)} - \cancel{x^{1/2} u'(x)} + x^{3/2} u''(x) \cancel{- \frac{1}{2} x^{-1/2} u(x)} + \cancel{x^{1/2} u'(x)} + x^{3/2} u(x) \cancel{- \frac{1}{4} x^{-1/2} u(x)}$

c.à.d $u''(x) + u(x) = 0$

Mais alors $u(x) = a \cos x + b \sin x$, $a, b \in \mathbb{R}$

et $y(x) = a \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

On a $|y(x)| \leq \frac{|a|+|b|}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Donc $y(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

On a $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \to 0$ pour $x \to 0+$ et $\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \to \infty$ pour $x \to 0+$.

Donc $\lim_{x \to 0} y(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si } a \neq 0 \\ 0, & \text{si } a = 0 \end{cases}$

Exercice 2

$\left\{\frac{k}{n} : k = n, \dots, 2n-1\right\}$ est la partition uniforme de pas $\frac{1}{n}$ de l'intervalle $[1,2]$.

Donc $$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \underbrace{\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\to \int_1^2 f(x)dx} + \underbrace{\frac{f(2)}{n}}_{\to 0} \longrightarrow \int_1^2 f(x)dx$$

Mais alors :
$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} k^3 = n^4 \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 \sim n^4 \int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4} n^4.$$

Exercice 3

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)dx = \left[\frac{f(x)\sin(nx)}{n}\right]_a^b - \int_a^b \frac{f'(x)\sin(nx)}{n}dx$$

Donc $$\left|\int_a^b f(x)\cos(nx)dx\right| \leq \frac{|f(a)|+|f(b)|}{n} + \frac{\|f'\|_\infty (b-a)}{n} \to 0$$

$$\int_a^b f(x)\cos^2(nx)dx = \int_a^b \frac{1}{2}f(x)dx + \underbrace{\int_a^b \frac{1}{2}f(x)\cos(2nx)dx}_{\substack{\to 0 \\ \text{(question 1)}}} \to \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$$

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ Soit $\varepsilon>0$

1) ... $\exists\, \delta>0$ tq. $\begin{cases}|x-y|<\delta \\ x>0,\ y>0\end{cases} \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$,

puisque f est uniformément continue.

Or, si $(x_n) \subset]0,+\infty[$ est de Cauchy, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n, m \geq n_0$ on a $|x_n - x_m| < \delta$. et donc $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Ceci prouve que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2) $x_n \to 0^+ \underset{\substack{\text{toute suite} \\ \text{convergente est de Cauchy}}}{\Longrightarrow} (x_n)$ de Cauchy $\underset{\boxed{Q1}}{\Longrightarrow} f(x_n)$ de Cauchy $\underset{\boxed{\mathbb{R}\text{ complet}}}{\Longrightarrow} \exists\, \ell \in \mathbb{R}$ tq. $f(x_n) \to \ell$.

3) De même, $y_n \to 0^+ \Rightarrow \exists\, \ell' \in \mathbb{R}$ tq. $f(y_n) \to \ell'$

$\exists\, n_0$ tq. $\forall n \geq n_0 \quad |x_n - y_n| < \delta$.

Mais alors $\forall n \geq n_0 \quad |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ grâce à la continuité uniforme de f. Donc (en prenant $n\to\infty$) $|\ell - \ell'| \leq \varepsilon$.

Mais $\varepsilon>0$ étant arbitraire, on conclut que $\ell = \ell'$!

Posons $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x>0 \\ \ell, & x=0 \end{cases}$ où $\ell = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ et (x_n) est une suite arbitraire de $]0,\infty[$ telle que $x_n \to 0$.

$\tilde{f}$ est bien définie et elle est continue sur $[0,+\infty[$.

4) $\nexists \lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (puisque, si $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \to 0$ et si $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) \to 1$).

donc on ne peut pas prolonger de manière continue sur $[0,+\infty[$ et la fonction n'est pas unif. continue.