Université Claude Bernard — Licence de Mathématiques
Année universitaire 2021 – 2022 — PROBABILITES

Partiel du 12 avril 2022 - Durée : 2 heures

Exercice 1 `Calcul de loi.`

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = pq^k$$

où $q = 1 - p$.

1. Calculer la probabilité que X soit impaire.
2. On définit la variable
$$Y = \left|\sin\left(\pi\frac{X}{2}\right)\right| \times \frac{X-1}{2}.$$
Dans quel ensemble Y prend-elle ses valeurs ?
3. Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$ puis déterminer la loi de Y.
4. En déduire son espérance $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 2 `Calcul de loi, encore.`

Considérons X et Y deux variables aléatoires réelles, indépendantes et qui suivent la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = pq^k$$

où $q = 1 - p$. On définit les variables aléatoires suivantes : $D = X - Y$ et $M = \min(X, Y)$.

1. (a) Calculer $\mathbb{P}(M > j)$ pour tout entier $j \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que M suit une une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
2. (a) Soit $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Suivant que $i < 0$ ou $i \geq 0$, exprimer l'évènement $\{D = i\} \cap \{M = j\}$ à l'aide de 2 évènements faisant intervenir séparément X et Y.
   (b) Donner l'ensemble des valeurs prises par le couple (D, M).
   (c) Montrer à l'aide de ce qui précède que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, on a
$$\mathbb{P}((D, M) = (i, j)) = p^2 q^{|i|+2j}.$$
3. En utilisant la question 2), déduire que la loi de D est donnée par : $\forall i \in \mathbb{Z}$,
$$\mathbb{P}(D = i) = \frac{p^2}{1 - q^2} q^{|i|}$$
4. Montrer que les variables D et M sont indépendantes.

Exercice 3 `Convergences`

Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1, c'est à dire de densité

$$x \mapsto e^{-x} 1_{[0,\infty)}(x)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Posons $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Calculer F_{Y_n}, la fonction de répartition de Y_n.
2. En déduire la densité de Y_n.
3. Montrer que la suite $\left(\frac{Y_n}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$ converge en probabilité vers 1.
4. Montrer que la suite $(Y_n - \ln n)_{n\geq 2}$ converge en loi et expliciter la limite.

Exercice 4 `Deux limites.`

Soient $(U_n)_{n>1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme dans $[-1, 1]$.

1. (a) Soient $0 \leq a < b \leq 1$ des réels, montrer que

$$\sum_{n>1} \mathbb{P}(nU_n \in [a, b]) = +\infty.$$

   (b) En déduire que, presque sûrement, l'intervalle $[a, b]$ contient une infinité de termes de la suite $(nU_n)_{n>1}$.

   (c) En déduire que la suite $(nU_n)_{n>1}$ est presque sûrement dense dans $\mathbf{R}$.

2. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\sum_{n>1} \mathbb{P}(n^2|U_n| \in [0, a]) < +\infty.$$

3. En déduire rigoureusement que $(n^2|U_n|)_{n>1}$ tend presque sûrement vers $+\infty$.