Université Claude Bernard — Licence de Mathématiques
Année universitaire 2021 – 2022 — PROBABILITES

Rapide correction de l'examen du 23 mai 2022 - Durée : 2 heures

---

`Formulaire :` On rappelle la fonction caractéristique d'une loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Exercice 1 `Calcul de loi et convergences`

Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est à dire de densité

$$x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Calculs de loi
   (a) Calculer la loi de
   $$U = \frac{X_1}{X_2}.$$
   `Soit` ϕ `une fonction test, on calcule`
   $$E(\phi(U)).$$
   `Par un changement de variables et une intégration par parties on trouve la loi suivante :`
   $$P_U(du) = \frac{1}{(1+u)^2} 1_{[0,\infty[}(u) du.$$
   (b) En déduire
   $$P(U \in [1,2]).$$
   `On a d'après ce qui précède,`
   $$P(U \in [1,2]) = \int_1^2 \frac{1}{(1+u)^2} du = 1/6.$$
   (c) Soit T une variable aléatoire réelle qui suit une loi de densité $f_T : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2} 1_{[0,\infty[}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que $1/T$ suit aussi la même loi.
   `En effet, d'après ce qui précède` T `a la même loi que` X_1/X_2`. Puisque` X_1 `et` X_2 `sont indépendantes et de même loi, la loi de` X_1/X_2 `est égale à la loi de` X_2/X_1`. Donc` T `et` $1/T$ `ont la même loi.`

(d) Montrer que la variable aléatoire $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Par les techniques habituelles, on a si $t \geq 0$,

$$P(Z_n \leq t) = 1 - e^{-n\lambda t}$$

Donc Z_n suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

(e) Donner la loi de la variable aléatoire

$$V = [X_1],$$

où, pour $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x (le plus grand entier inférieur à x).

V est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(V = n) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}),$$

on retrouve donc une loi géométrique.

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = X_n^2$.

(a) Calculer la loi de T_n et son espérance.

Par la méthode habituelle, on trouve que

$$P_{T_n}(du) = \frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}} 1_{[0,+\infty[} du.$$

(b) En déduire la convergence de la suite de variables aléatoires ci-dessous, et préciser la nature de cette convergence :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i\right)_n.$$

La suite (T_n) sont des v.a.i.i.d. et de plus il est facile de vérifier par 2 intégrations par parties que

$$E(T_1) = E(X_1^2) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ainsi par la loi forte des grands nombres on a P.S.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{2}{\lambda^2}.$$

3. Convergences.

On suppose que $\lambda = 1$ et on pose $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Calculer F_{Y_n}, la fonction de répartition de Y_n.
Pour tout $t \geq 0$,

$$F_{Y_n}(t) = (1 - e^{-t})^n.$$

(b) En déduire la densité de Y_n, pour $n \geq 1$.
Ainsi la densité de Y_n est donné par

$$f_{Y_n}(x) = ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}1_{[0,\infty[}(x).$$

(c) Montrer que la suite $\left(\frac{Y_n}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$ converge en probabilité vers 1.
On a pour tout $\epsilon > 0$

$$P(|\frac{Y_n}{\ln n} - 1| \leq \epsilon) = P((1 - \epsilon)\ln n \leq Y_n \leq (1 + \epsilon)\ln n)$$

Soit donc

$$P(|\frac{Y_n}{\ln n} - 1| \leq \epsilon) = F_{Y_n}((1 + \epsilon)\ln n) - F_{Y_n}((1 - \epsilon)\ln n)$$

Un calcul de limites montre que

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}((1 - \epsilon)\ln n) = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}((1 + \epsilon)\ln n) = 1$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{Y_n}{\ln n} - 1| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(|\frac{Y_n}{\ln n} - 1| \leq \epsilon)) = 0$$

Donc on a bien que $\frac{Y_n}{\ln n}$ converge en probabilité vers 1.

(d) Montrer que la suite $(Y_n - \ln n)_{n\geq 2}$ converge en loi et expliciter la limite.
Soit $z \in \mathbf{R}$ et

$$G_n(z) = P(Y_n - \ln n \leq z)$$

Un autre calcul de limite montre

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = \exp(-e^{-z}).$$

Ainsi, $(Y_n - \ln n)$ converge en loi vers la variable aléatoire de densité

$$f(x) = e^{-x}\exp(-e^{-x})$$

Exercice 2 Un vecteur gaussien

Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien *centré* dans $\mathbf{R}^2$ de matrice de covariances

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2)$ et $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$

1. Donner la loi de X_1.

   Bien entendu, X_1 suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2. Les variables X_1 et X_2 sont elles indépendantes ?

   d'après le théorème fondamental des vecteur Gaussien, puisque

   $$Cov(X_1, X_2) = 0,$$

   les deux variables sont indépendantes.

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^2$, donner la loi de la variable aléatoire

   $$Z = aX_1 + bX_2 + c.$$

   Puisque (X_1, X_2) est un vecteur gaussien, Z suit une loi gaussienne. On a par un simple agébrique

   $$E(Z) = c$$

   et

   $$Var(Z) = a^2 + b^2.$$

4. Montrer que le vecteur (Y_1, Y_2) est un vecteur gaussien.

   Toute combinaison linéaire des variables Y_1 et Y_2 est une combinaison linéaire des variables X_1 et X_2. Puisque le vecteur (X_1, X_2) est un vecteur gaussien, toute combinaison linéaires des variables X_1) et X_2 suit une loi gaussienne. Ainsi toute combinaison linéaire des variables Y_1 et Y_2 suit une loi gaussienne. Donc le vecteur (Y_1, Y_2) est un vecteur gaussien.

5. Calculer l'espérance et la matrice de covariance du vecteur gaussien (Y_1, Y_2).

   Posons $T = (Y_1, Y_2)$.

   On a $E(T) = (0, 0)$ et on a encore

   $$\Gamma_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

   Oui elles sont indépendantes pour les mêmes raisons que précédemment.

7. Démontrer que la variable aléatoire X_1X_2 a la même loi que $\frac{1}{2}(X_1^2 - X_2^2)$.
   On pourra utiliser la formule suivante $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$.
   On a
   $$X_1X_2 = \frac{1}{4}(X_1+X_2)^2 - \frac{1}{4}(X_1-X_2)^2 = \frac{1}{2}Y_1^2 - \frac{1}{2}Y_2^2.$$
   Puisque le vecteur (X_1, X_2) a la même loi que le couple (Y_1, Y_2), on a
   $$\mathcal{L}(\frac{1}{2}Y_1^2 - \frac{1}{2}Y_2^2) = \mathcal{L}(\frac{1}{2}X_1^2 - \frac{1}{2}X_2^2) = \mathcal{L}(X_1X_2)$$

Exercice 3 Convergence

Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. de loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$. Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 3^{-k} X_k.$$

1. Soit $n \geq 1$, calculer la loi de S_n.
   Le vecteur $(X_1, \cdots, X_N)$ suit un vecteur gaussien car les variables sont gaussiennes et indépendantes. Ainsi S_n suit une loi gaussienne et on a
   $$E(S_n) = 0$$
   et
   $$Var(S_n) = 3^{-2}\frac{1-3^{-2n}}{1-3^{-2}} = \frac{9^n - 1}{8 * 9^n}$$
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera.
   On a pour tout $t \in \mathbf{R}$,
   $$\phi_{S_n}(t) = \exp(-Var(S_n)\frac{t^2}{2}),$$
   donc
   $$\lim_{t\to\infty} \phi_{S_n}(t) = \exp(-\frac{1}{8}\frac{t^2}{2}).$$
   Ainsi, par le théorème de Paul Lévy, la suite (S_n) converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{8})$