

**Contrôle continu n° 2**

MERCREDI 1<sup>ER</sup> MARS 2023 - DURÉE : 1H30

**Question de cours.** Énoncer le théorème de Rolle.

**Correction.** L'énoncé de ce théorème est à la page 24 du cours. Ici et plus loin, les références seront toujours par rapport au fichier pdf du Chapitre II du cours, sur la page de l'UE.

**Exercice d'application du cours.** Dans toute cette partie,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction dérivable, avec  $I \subset \mathbf{R}$  précisé à chaque question.

1. On suppose ici  $I = \mathbf{R}$ . Montrer soigneusement qu'on a l'implication suivante :

$$\left[ \forall x \in I, f'(x) > 0 \right] \implies \left[ f \text{ est strictement croissante sur } I \right]. \quad (\star)$$

*Indication :* pour  $x < y$ , on pourra appliquer le théorème des accroissements finis sur  $[x, y]$ .

2. On suppose maintenant  $I = \mathbf{R}^*$ . L'implication  $(\star)$  est-elle vraie en général? Justifier.
3. Réciproquement, si  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $I = \mathbf{R}$ , a-t-on  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ ? Justifier.

**Correction.**

1. On suppose  $f' > 0$  sur  $I = \mathbf{R}$ . Soit  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $x < y$ . D'après les hypothèses de cette question, la fonction  $f$  est bien continue sur l'intervalle  $[x, y]$  et dérivable sur  $]x, y[$ . D'où l'on peut appliquer le théorème des accroissements finis (cours p. 25) : il existe  $c \in ]x, y[$  tel que  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ . Utilisant alors notre hypothèse pour écrire  $f'(c) > 0$ , on en déduit bien que  $f(y) - f(x) > 0$ , soit  $f(y) > f(x)$ . Au bilan, on a bien montré l'implication

$$[x < y] \implies [f(x) < f(y)],$$

qui n'est autre que la définition de la stricte croissance de  $f$ , ce qui conclut la démonstration.

**Remarque 1 :** on peut bien affirmer que  $f$  est continue sur  $[x, y]$  car  $f$  est supposée dérivable et la dérivabilité en un point implique la continuité en ce même point. Il est en particulier suffisant ici de remplacer la justification en bleu par "la fonction  $f$  est bien dérivable sur l'intervalle  $[x, y]$ ".

2. Non, l'implication  $(\star)$  est fausse pour  $I = \mathbf{R}^*$ . Considérons en effet la fonction

$$f: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto -1/x.$$

Cette fonction est dérivable sur  $I = \mathbf{R}^*$  et satisfait bien, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) = 1/x^2 > 0$ . On remarque cependant que  $-1 < 1$  alors que

$$f(-1) = 1 > f(1) = -1,$$

ce qui contredit bien la (stricte) croissance de  $f$  sur  $I$ .

**Remarque 2 :** on a utilisé ici que, pour montrer qu'une implication est fausse, il suffit d'exhiber un exemple tel que la conclusion de l'implication est fausse, tandis que son hypothèse est vraie.

3. Non : la réciproque de l'implication  $(\star)$  est fausse même pour  $I = \mathbf{R}$ . Considérons en effet la fonction  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^3$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbf{R}$  avec, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2$ . En particulier, on a  $f'(0) = 0$  et pourtant cette fonction est bien strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 1.** Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction dérivable telle que  $f(0) > 0$ ,  $f(1) < 0$  et  $f(2) > 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in \mathbf{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .
2. Donner un équivalent simple quand  $x \rightarrow +\infty$  de  $f(x) = 2^x + x^7 + e^{8x}$ .
3. Donner un équivalent simple quand  $x \rightarrow +\infty$  de  $f(x) = \sqrt{x + \sin(x^2)}$ .

**Correction.**

1. La fonction  $f$  étant en particuliers continue sur  $[0, 1]$  avec  $f(0)f(1) \leq 0$ , le théorème des valeurs intermédiaires (voir cours Analyse 1) assure qu'il existe  $a \in [0, 1]$  tel que  $f(a) = 0$ . De plus, comme  $f(1) < 0$ , on obtient même  $a \in [0, 1[$ . De même, la fonction  $f$  étant continue sur  $[1, 2]$  avec  $f(1)f(2) \leq 0$ , le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe  $b \in [1, 2]$  tel que  $f(b) = 0$ . De plus, comme  $f(1) < 0$ , on obtient même  $b \in ]1, 2]$ .

On est maintenant sous les hypothèses du théorème de Rolle sus-cité : on a bien  $a < b$ ,  $f$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  avec  $f(a) = f(b)$ . Il existe donc bien  $c \in ]a, b[ \subset \mathbf{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

2. Après calculs (au brouillon), on factorise par le terme dont on attend qu'il domine. On écrit quand  $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = e^{8x} \left( e^{-x(8-\ln 2)} + x^7 e^{-8x} + 1 \right) = e^{8x} \underbrace{(o(1) + o(1) + 1)}_{\rightarrow 1} \sim e^{8x},$$

par définition d'un équivalent (définition cours p. 8), écrivant  $2^x = e^{x \ln 2}$ . Le premier  $o(1)$  utilise  $8 > \ln 2$  et le second une croissance comparée.

3. Pour bien comprendre le sens de la question, on vérifie tout d'abord (même si on ne l'écrit pas forcément sur la copie) que la quantité sous la racine est positive pour  $x$  assez grand, par exemple, on a grossièrement

$$\forall x \geq 1, \quad [-1 \leq \sin(x^2)] \implies [0 \leq x + \sin(x^2)].$$

On peut donc écrire successivement, quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$f(x) = \sqrt{x + \sin(x^2)} = \sqrt{x \left( 1 + \frac{\sin(x^2)}{x} \right)} = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{\sin(x^2)}{x}},$$

puis

$$0 \leq \frac{|\sin(x^2)|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = o(1),$$

d'où  $\frac{\sin(x^2)}{x} = o(1)$  par encadrement et donc

$$f(x) = \sqrt{x} \underbrace{\sqrt{1 + o(1)}}_{\rightarrow 1} = \sqrt{x} (1 + o(1)) \sim \sqrt{x}.$$

**Remarque 3 :** pour montrer qu'une quantité oscillante comme  $\frac{\sin(x^2)}{x}$  tend vers 0 quand  $x \rightarrow +\infty$ , on attend un encadrement avec des valeurs absolues. Notamment, cette expression n'a pas d'équivalent vraiment plus simple dans le catalogue des fonctions usuelles. Remarquez également que les notations " $o$ " sont plus flexibles (le " $o$ " peut notamment encore dépendre de  $x$ ) que l'écriture de " $\lim$ " qui demande toujours de se demander au préalable si elle est licite.

**Exercice 2.** On considère les fonctions

$$f: \begin{array}{l} [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 2 - 2e^{-x} \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{l} [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto f(x) - x. \end{array}$$

On rappelle que  $2 < e < 3$  et  $\ln 2 < 1$ .

1. Étude de la fonction  $g$ .
  - (a) Étudier la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
  - (b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
2. (a) Montrer qu'il existe un unique  $a > 0$  tel que  $g(a) = 0$ .
- (b) Montrer que  $1 < a < 2$ .
3. (a) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet  $a$  pour unique solution strictement positive.
- (b) Montrer que  $f(1) > 1$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $f$  en faisant apparaître le réel  $a$ .
5. Montrer que pour tout  $x \in [1, a]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{2}{e}$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

6. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \in [1, a]$ .
7. (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $|u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{e}|u_n - a|$ .
- (b) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $|u_n - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$ .
- (c) Montrer la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vers  $a$ .

**Correction.**

1. (a) Par propriété des fonctions usuelles, quand  $x \rightarrow +\infty$ , on obtient successivement  $e^{-x} \rightarrow 0$ ,  $f(x) \rightarrow 2$  et donc  $g(x) \rightarrow -\infty$ .

1. (b) La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et, pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $g'(x) = (-2) \times (-e^{-x}) - 1 = +2e^{-x} - 1$ . Utilisant  $\exp > 0$ , la stricte décroissance de l'inverse sur  $]0, +\infty[$ , puis la stricte croissance du logarithme, on en déduit que

$$g'(x) > 0 \iff e^{-x} > +1/2 \iff e^x < 2 \iff x < \ln 2,$$

et  $g'(x) = 0 \iff x = \ln 2$ . On observe également que  $g(\ln 2) = 2 - 1 - \ln 2 = 1 - \ln 2 := \alpha > 0$ , car l'énoncé rappelle  $\ln 2 < 1$ .

$x$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$\alpha$	$-\infty$

2. (a) On a  $g(0) = 0$ ; de plus, comme  $g' > 0$  sur l'intervalle  $]0, \ln 2[$ , la fonction  $g$  est strictement croissante sur cette intervalle et ne s'y annule donc pas. La question se réduit donc à montrer que  $g$  s'annule exactement une fois sur  $J := [\ln 2, +\infty[$ .

On a vu que  $\alpha = g(\ln 2) > 0$ . Enfin, comme  $g' < 0$  sur l'intervalle  $] \ln 2, +\infty[$ , elle y est strictement décroissante et s'annule donc **au plus** une fois sur  $J$ .

Maintenant, on calcule  $g(1) = 2 - 2e^{-1} - 1 = 1 - 2e^{-1} = \frac{e-2}{e} > 0$ , l'énoncé rappelant que  $e > 2$ ; d'autre part, on a  $g(2) = 2 - 2e^{-2} - 2 = -2e^{-2} < 0$ . Ainsi, la fonction  $g$  étant continue sur  $[1, 2]$  avec  $g(1)g(2) < 0$ , le théorème des valeurs intermédiaires assure que  $g$  s'annule **au moins** une fois sur  $]1, 2[ \subset ]0, +\infty[$ .

Au bilan, on a bien que  $g$  s'annule exactement une fois sur  $J$  et donc (voir raisonnement inductif) sur  $]0, +\infty[$  en un réel  $a$ .

2. (b) L'argument ci-dessus donne bien au passage  $a \in ]1, 2[$ .

3. (a) On a clairement que, pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f(x) = x \iff g(x) = 0$ . Par la question 2 (a), on en déduit que l'équation  $f(x) = x$  admet  $a$  comme unique solution strictement positive.

3. (b) On a que  $f(1) > 1 \iff g(1) > 0$ , ce qui est vrai, (comme vu dans la solution de la question 2 (a)).

4. La fonction  $f$  est dérivable avec  $f'(x) = +2e^{-x} > 0$  pour tout  $x \geq 0$ . On a de plus  $f(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ , comme vu dans la solution de la question 1 (a).

$x$	0	$a$	$+\infty$
$f'(x)$	+		
$f(x)$	0	$a$	2

5. Par décroissance de la fonction  $x \mapsto e^{-x}$ , on a pour tout  $x \in [1, a] \subset [1, 2]$ ,

$$0 < f'(x) = |f'(x)| \leq f'(1) = \frac{2}{e}.$$

6. Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbf{N}$  que la propriété " $u_n \in [1, a]$ " est vraie.

Initialisation :  $u_0 = 1$  et la propriété est vraie au rang  $n = 0$ .

Hérédité : supposons la propriété vraie à un certain rang  $n \in \mathbf{N}$ . Montrons qu'elle est alors vraie au rang  $n + 1$ . En effet, comme  $f$  est croissante sur  $[1, a]$ , on a que  $1 \leq u_n \leq a$  et  $f(1) \geq 1$  impliquent  $1 \leq f(1) \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq f(a) = a$ , ce qui conclut.

En conclusion, par principe de récurrence, on a bien démontré la propriété pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

7. (a) Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Comme  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $a = f(a)$ , la propriété à démontrer se réécrit

$$|f(u_n) - f(a)| \leq \frac{2}{e} |u_n - a|.$$

Si  $u_n = a$ , la propriété est claire. Sinon,  $u_n \in [1, a[$  par la question 6. Comme la fonction  $f$  est continue sur  $[u_n, a]$  et dérivable sur  $]u_n, a[$ , le théorème des accroissements finis assure qu'il existe  $c \in ]u_n, a[$  tel que  $(f(a) - f(u_n)) = f'(c)(a - u_n)$ . Prenant les valeurs absolues et utilisant la question 5, on conclut via

$$|f(a) - f(u_n)| = |f'(c)||a - u_n| \leq \frac{2}{e} |u_n - a|.$$

7. (b) Montrons la propriété " $|u_n - a| \leq (\frac{2}{e})^n$ " par récurrence sur  $n \in \mathbf{N}$ .

Initialisation : on a  $|u_0 - a| = |1 - a| \leq 2 - 1 = 1$  car  $1 < a < 2$  par la question 2 (b).

Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain  $n \in \mathbf{N}$ . On écrit alors

$$|u_{n+1} - a| \underbrace{\leq \frac{2}{e}}_{7(a)} \times |u_n - a| \underbrace{\leq \frac{2}{e}}_{HR} \times \left(\frac{2}{e}\right)^n = \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1},$$

ce qui montre bien la propriété au rang  $n + 1$ .

En conclusion, par principe de récurrence, la propriété est bien établie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

7. (c) Comme  $0 < \frac{2}{e} < 1$  (voir énoncé), quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a  $(2/e)^n \rightarrow 0$  si bien que  $0 \leq |u_n - a| \rightarrow 0$  par encadrement, utilisant la question précédente : ceci donne bien la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vers  $a$ .

### Exercice 3.

1. La fonction  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto |x|$  est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
2. Soit  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  donnée par  $f(x) = (1 - |x|)\sqrt{1 + 2|x|}$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbf{R}$ .
  - (b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}^*$ .
  - (c) Montrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ , on a

$$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{1 + 2|x|}}$$

- (d) On se propose enfin d'étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
  - i. Étudier l'existence de la limite de  $f'(x)$  quand  $x \rightarrow 0$ ,  $x \neq 0$ .
  - ii. Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et donner  $f'(0)$ .

### Correction.

1. Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $|x| = x$ , si bien que  $g$  est dérivable à droite en 0, de dérivée à droite  $g'_d(0) = +1 := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$ . De même, pour tout  $x \leq 0$ , on a  $|x| = -x$ , si bien que  $g$  est dérivable à gauche en 0, de dérivée à gauche  $g'_g(0) = -1 := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$ . Au bilan, ces deux limites étant distinctes, le taux d'accroissement  $\frac{g(0+h) - g(0)}{h}$  de  $g$  en 0 n'a pas de limite quand  $h \rightarrow 0$ ,  $h \neq 0$ , si bien que  $g$  n'est pas dérivable en 0.

2. (a) La fonction  $a: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $y \mapsto (1 - y)\sqrt{1 + 2y}$  est bien définie et continue, ainsi que la fonction  $g: \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty[$ ,  $x \mapsto |x|$ . D'où la fonction  $f = a \circ g$  est également définie continue sur  $\mathbf{R}$  comme composée.

**Remarque 4 :** pour traiter convenablement cette question, il est nécessaire de mettre en évidence que l'image  $[0, +\infty[$  (qu'on ne peut donc remplacer par  $\mathbf{R}$  dans cet argument...) de  $g$  est incluse dans le domaine de continuité de  $a$ .

2. (b) La fonction  $a: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $y \mapsto (1 - y)\sqrt{1 + 2y}$  est bien dérivable ( $\sqrt{\cdot}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et  $y > 0 \implies 1 + 2y > 0$ ), ainsi que la fonction  $g: \mathbf{R}^* \rightarrow ]0, +\infty[$ ,  $x \mapsto |x|$ . D'où la fonction  $f = a \circ g$  est également dérivable sur  $\mathbf{R}^*$  comme composée.

2. (c) On a  $g'(x) = (x)' = 1$  pour  $x > 0$  et  $g'(x) = (-x)' = -1$  pour  $x < 0$  : dans tous les cas,  $g'(x) = \frac{x}{|x|}$ . D'autre part, pour tout  $y \geq 0$ , on calcule

$$a'(y) = -\sqrt{1 + 2y} + \frac{\cancel{2}(1 - y)}{\cancel{2}\sqrt{1 + 2y}} = \frac{-(1 + 2y) + (1 - y)}{\sqrt{1 + 2y}} = \frac{-3y}{\sqrt{1 + 2y}}.$$

D'où, pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ , on a

$$f'(x) = a'(|x|) \times g'(x) = \frac{-3|x|}{\sqrt{1+2|x|}} \times \frac{x}{|x|},$$

ce qui conclut.

2. (d) i. Quand  $x \rightarrow 0$ , on a  $\sqrt{1+2|x|} \rightarrow 1$  ( $\sqrt{\cdot}$  est continue en 1) et  $-3x \rightarrow 0$  : d'où  $f'(x)$  admet donc une limite comme quotient et cette limite vaut 0.

2. (d) ii. On vérifie les hypothèses du théorème de la limite de la dérivée TLD (cours p. 27) :

- $f$  est continue en 0,
- $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}^*$ ,
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$  existe et vaut 0 par la question précédente.

Ce théorème implique donc que  $f$  est dérivable et de dérivée nulle en 0.

**Remarque 5 :** même si ce n'était pas ici l'esprit de l'exercice, on peut tout à fait montrer la dérivabilité de  $f$  en 0 de façon élémentaire en utilisant la proposition p. 17 du cours (qui est beaucoup plus proche de la définition de la dérivabilité que le TLD). On a quand  $y \rightarrow 0$ ,  $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$  car  $(\sqrt{1+y})'_{y=0} = \frac{1}{2}$ . D'où quand  $x \rightarrow 0$ , on a  $y := 2|x| \rightarrow 0$  et on peut donc écrire

$$\sqrt{1+2|x|} = 1 + \frac{2|x|}{2} + \underbrace{o(|x|)}_{:= o(1) \times (\pm 1) \times x = o(x)},$$

puis

$$f(x) = (1 - |x|)(1 + |x| + o(x)) = 1 + (|x| - |x|) - \underbrace{x^2}_{= x \times x = o(1) \times x = o(x)} + o(x) = 1 + lx + o(x)$$

avec  $l = 0$ . La proposition p. 17 du cours tire directement de ce dernier développement que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = l = 0$ .