TP01 : méthode de Newton-Raphson

Analyse 2 pour informaticiens

Printemps 2023

Pour commencer, téléchargez le notebook à compléter sur la page web du cours, et lancez la première cellule permettant de charger les packages dont vous aurez besoin pour réaliser ce TP.

Implémentation de l'algorithme de Newton-Raphson

Dans un premier temps, on se propose d'implémenter numériquement la méthode de Newton-Raphson pour la recherche des racines d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On rappelle que la méthode est construite de façon itérative, comme décrit ci-après. On commence par une valeur $x_0 \in I$ dans le domaine de f. On définit ensuite par récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

On rappelle que sous de bonnes hypothèses, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une racine de la fonction f.

On se propose d'implémenter l'algorithme en deux étapes.

Implémentation d'une itération. Complétez la fonction `iter_NR` selon les spécifications fournies. La fonction devrait prendre en argument une valeur x_n, une fonction f et la dérivée de la fonction f, et renvoyer l'itération x_{n+1} selon l'algorithme de Newton-Raphson.

Implémentation de l'algorithme de Newton-Raphson. Complétez la fonction `NR` selon les spécifications fournies. La fonction devrait prendre en argument une valeur initiale x_0 avec laquelle débuter la procédure itérative, une valeur `nb_iter` indiquant le nombre d'itérations à effectuer, une fonction f et sa dérivée, et renvoyer une liste de `nb_iter` +1 couples, contenant les itérations x_0 jusqu'à $x_{\texttt{nb\_iter}}$ et les valeurs de f en ces points.

Premiers essais.

On se propose de tester notre algorithme sur quelques fonctions usuelles, afin d'observer quelques comportements typiques de la méthode de Newton-Raphson. Pour les représentations graphiques, on pourra utiliser la fonction `plot_NR` fournie dans le notebook. Pour les fonctions f, g et h définies respectivement par

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \arctan x \quad \text{et} \quad h(x) = x^3 - 2x + 2,$$

répondez aux questions suivantes.

(a) Dessinez (à la main) le graphe de la fonction.

(b) Quelle est la dérivée de la fonction ? Quelles sont ses racines ?

(c) Pour les valeurs initiales 1, -3 et 1.5, sans recourir à l'ordinateur, pensez-vous que la méthode de Newton-Raphson va converger ? Si oui, vers quelles valeurs ?

(d) Appliquez l'algorithme codé précédemment sur ces valeurs intiales. Confrontez les résultats obtenus avec vos réponses à la question précédente. On pourra choisir librement le nombre d'itérations à effectuer. Lorsque la convergence a lieu, on observera combien d'itérations sont nécessaires.

(e) Représentez les itérations pour les trois valeurs ci-dessus sur un graphique. Expliquez les résultats obtenus à la lumière de cette représentation graphique.

Questions de convergence

On se propose à présent d'étudier quelques exemples mettant en lumière les propriétés de convergence de l'algorithme de Newton-Raphson.

(a) Rappelez le théorème de convergence vu en cours pour la méthode de Newton-Raphson.

(b) Pour les fonctions de la section précédente, ce critère est-il rempli ?

Convergence lente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $f_n(x) = x^n$.

(a) Esquissez à la main le graphe de f_n pour quelques valeurs de n et déterminez ses racines éventuelles.

(b) Quelle est la dérivée de f_n ? Quelle est sa dérivée deuxième ?

(c) Le critère de convergence vu en cours est-il vérifié pour la fonction f_n ?

(d) En commençant à 1, appliquez la méthode de Newton-Raphson à la fonction f_n pour différentes valeurs de n. Les itérations convergent-elles ? Si oui, vers quelle valeur ? Est-ce une racine de f_n ?

(e) Représentez les itérations sur un graphique.

(f) Déterminez, pour plusieurs valeurs de n, le nombre d'itérations requises pour que la suite converge. Commentez les résultats obtenus lorsque n devient de plus en plus grand, et expliquez à la lumière de la représentation graphique obtenue au point précédent. (Comme votre ordinateur ne peut représenter qu'un nombre fini de décimales, il vient un moment où l'écart par rapport à la valeur limite passe sous la précision machine. Si la suite des itérées converge bien vers une racine de f, elle devient alors constante à partir de ce moment.)

Une fonction avec un point singulier. Considérons $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^{\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$.

(a) Esquissez à la main le graphe de f et déterminez ses racines éventuelles.

(b) Calculez la dérivée en f sur $\mathbb{R}^*$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifiez.

(c) Le critère de convergence vu en cours est-il vérifié pour la fonction f ?

(d) Pour $\alpha = 0.4$, choisissez quelques valeurs réelles, et appliquez la méthode de Newton-Raphson pour f au départ de ces valeurs. Les itérées convergent-elles ? Si oui, vers quelle valeur. Est-ce une racine de f ?

(e) Effectuez une représentation graphique des itérations obtenues, et commentez les résultats du point précédent à la lumière de cette représentation.

Une fonction oscillante. Considérons $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin(1/x) + 2x^4 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Esquissez à la main le graphe de f et déterminez ses racines éventuelles.

(b) Quelle est la dérivée de f ? Quelle est sa dérivée seconde ?

(c) Le critère de convergence vu en cours est-il vérifié pour la fonction f ?

(d) Appliquez la méthode de Newton-Raphson pour f au départ de 1. Les itérées convergent-elles ? Si oui, vers quelle valeur. Est-ce une racine de f ?

(e) Effectuez une représentation graphique des itérations obtenues, et commentez les résultats du point précédent à la lumière de cette représentation. Il est pertinent de choisir soigneusement l'intervalle de valeurs utilisé pour la représentation graphique. On pourra si besoin effectuer plusieurs tracés.

La méthode de la sécante

Malgré tous ses avantages, la méthode de Newton-Raphson présente un inconvénient majeur : elle requiert le calcul de la dérivée de la fonction dont on souhaite déterminer les racines. Avec l'implémentation que nous avons présentée ci-haut, cela nécessite de calculer à la main la dérivée pour pouvoir la fournir en argument à l'algorithme. Pour pallier cela, une version alternative de l'algorithme de Newton-Raphson a été imaginée, permettant d'approximer une racine d'une fonction donnée lorsque la dérivée est indisponible. Cette méthode porte le nom de *méthode de la sécante*, et nous en proposons une implémentation ci-après. Il s'agit à nouveau d'une méthode itérative, et l'itérée x_{n+1} s'obtient à partir de x_n et x_{n-1} *via* l'expression

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

S'agissant d'une récurrence d'ordre 2, il est nécessaire de prescrire *deux* valeurs initiales x_0 et x_1 pour démarrer le procédé itératif.

Par quelle quantité la dérivée de f a-t-elle été remplacée dans la définition de la méthode de la sécante ? Quel est le lien avec la dérivée ?

Implémentation de la méthode de la sécante. Complétez la fonction `secante` selon les spécifications fournies. La fonction devrait prendre en argument deux valeurs initiales x_0 et x_1 avec lesquelles débuter la procédure itérative, une valeur `nb_iter` indiquant le nombre d'itérations à effectuer et une fonction f, et renvoyer une liste de `nb_iter` +1 couples, contenant les itérations x_0 jusqu'à $x_{\texttt{nb\_iter}}$ et les valeurs de f en ces points.

À titre de curiosité, on mentionne sans preuve que la convergence de la méthode de la sécante est d'ordre φ, où φ n'est nul autre que le *nombre d'or*. En comparaison, la méthode de Newton-Raphson est dite quadratique, donc d'ordre 2.

Selon le temps dont vous disposez, répétez avec la méthode de la sécante l'analyse effectuée pour la méthode de Newton-Raphson sur les différentes fonctions proposées. Comparez systématiquement les résultats obtenus à l'aide des deux méthodes.