Analyse 2 INFO, printemps 2023
Solutions des exercices sur la formule de Taylor-Lagrange

Exercice 22 1. La formule de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle entre 0 et x à l'ordre n s'écrit

$$\exp x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \exp c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

pour un certain $c \in]0, x[$.

2. Puisque $0 < \exp c < \exp 1 = \mathrm{e}$ pour tout $c \in]0, 1[$, la formule de Taylor-Lagrange écrite au point précédent, appliquée avec $x = 1$, assure qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$\mathrm{e} = \exp 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \exp c \frac{1}{(n+1)!} > \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

et

$$\mathrm{e} = \exp 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \exp c \frac{1}{(n+1)!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}.$$

Or, nous savons que $\mathrm{e} < 3$. Par conséquent, pour tout $n \geq 2$, nous avons $\mathrm{e} < n + 1$. Dès lors,

$$\mathrm{e} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{n+1}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

On en conclut que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \mathrm{e} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

3. Supposons par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$ pour certains entiers p et q, avec $q \neq 0$. En appliquant la formule du point précédent avec $n = q$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q!}.$$

En multipliant par $q!$, nous trouvons

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < p(q-1)! < \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + 1.$$

Les nombres constituant les membres de gauche et de droite de cette chaîne d'inégalités sont deux entiers consécutifs. Le nombre du milieu est également un entier. Ceci est une contradiction : il ne peut exister aucun nombre entier strictement compris entre deux entiers consécutifs. On en conclut que e est irrationnel.

Exercice 23 1. La formule de Taylor-Lagrange pour cos à l'ordre n entre 0 et x s'écrit

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \cos^{(n+1)}(c) \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

pour un certain $c \in]0, x[$. Pour calculer $\cos^{(k)}(0)$, nous savons que $\cos(0) = 1$, $\cos'(0) = -\sin(0)) = 0$, $\cos''(0) = -\cos(0) = -1$, $\cos^{(3)}(0) = \sin(0) = 0$, $\cos^{(4)}(0) = \cos(0) = 1$, et ainsi de suite. On calcule de même $\cos^{(n+1)}(c)$ en fonction de c. Une observation importante est le fait que $|\cos^{(n+1)}(c)| \le 1$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Nous invoquons la formule de Taylor-Lagrange écrite au point précédent, avec $x = \frac{\pi}{32}$ et $n = 5$. Nous en déduisons l'existence de $c \in]0, \frac{\pi}{32}[$ tel que

$$\cos\frac{\pi}{32} = 1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 32^2} + \frac{\pi^4}{24 \cdot 32^4} - \cos(c) \frac{\pi^6}{720 \cdot 32^6}.$$

On peut calculer que

$$\left| \cos(c) \frac{\pi^6}{720 \cdot 32^6} \right| \le \frac{\pi^6}{720 \cdot 32^6} \le 10^{-5}.$$

(Pour établir la dernière inégalité, on pourra par exemple utiliser le fait que $\pi \le 4$. Nous avons alors $\pi^6 \le 2^6 \cdot 2^6$. Or, $2^6/32^6 = 1/16^6 \le 10^{-5}$, et $2^6 = 64$, d'où $2^6/720 \le 1$.) Ceci permet de conclure que

$$1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 32^2} + \frac{\pi^4}{24 \cdot 32^4}$$

est une approximation de $\cos\frac{\pi}{32}$ à 10^{-5} près.