Analyse 2 INFO, printemps 2023
Solution du CC1 : sujet 2

Question de cours

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite contractante s'il existe $k \in]0,1[$ tel que pour tout $(x,y) \in I^2$,
$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Exercice 1

Commençons par montrer que la suite est bien définie. Pour cela, il s'agit de vérifier que $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui assure que $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. Mais en fait, comme $a > 0$, nous avons $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, ce qui suffit pour conclure.

Attelons-nous à présent à la convergence de la suite. Nous savons que si la suite converge, alors sa limite est nécessairement un point fixe de f. Par conséquent, il est utile de commencer par déterminer lesdits points fixes. L'équation de point fixe $x = f(x)$ se réécrit
$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\frac{a}{x},$$
et donc $x^2 = a$. L'unique point fixe dans $\mathbb{R}_+^*$ est donc $l = \sqrt{a}$.

Montrons à présent que la suite converge bien. Il existe plusieurs façons de procéder. La manière la plus rapide de procéder repose sur le théorème du point fixe. Commençons par observer que f est croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$. En effet, pour $x \geq \sqrt{a}$, nous calculons
$$f'(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{a}{x^2}\Big) \geq \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{a}{\sqrt{a}^2}\Big) = 0.$$
Par conséquent, comme $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, nous trouvons
$$f(x) \geq f(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \quad \text{pour tout } x \geq \sqrt{a},$$
ce qui montre que $f([\sqrt{a}, +\infty[) \subset [\sqrt{a}, +\infty[$. Remarquons qu'il est possible de montrer cette affirmation sans recourir au calcul différentiel. En effet, l'inégalité arithmético-géométrique garantit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big) \geq \sqrt{x\frac{a}{x}} = \sqrt{a}.$$

En outre, pour $x \in [\sqrt{a}, +\infty[$, nous avons $f'(x) \leq \frac{1}{2}$, et donc, comme $f'(x) \geq 0$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Ceci montre que f est contractante – on peut en fait prendre $k = \frac{1}{2} < 1$ dans la définition de contraction. Comme $[\sqrt{a}, +\infty[$ est un intervalle fermé, le théorème du point fixe s'applique et garantit la convergence de la suite vers l'unique point fixe de f. Autrement dit,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}.$$

Si on ne se souvient plus du théorème du point fixe, on peut démontrer à la main la convergence de la suite. En effet, comme $f([\sqrt{a}, +\infty[) \subset [\sqrt{a}, +\infty[$, nous avons $u_n \geq \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sup_{x \in [\sqrt{a}, +\infty[} |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, l'inégalité des accroissements finis entraîne que

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| = |f(u_n) - f(\sqrt{a})| \leq \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{a}|.$$

Par récurrence, on en déduit que

$$|u_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \sqrt{a}| \to 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$. Ce raisonnement revient en fait à refaire la démonstration du théorème du point fixe dans le cas particulier de la suite fournie dans cet exercice.

Une troisième approche consiste à employer un argument de monotonicité. En effet, comme f est croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$ et que $f([\sqrt{a}, +\infty[) \subset [\sqrt{a}, +\infty[$, nous savons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par $\sqrt{a}$ et monotone. Puisque $u_0 > \sqrt{a}$, nous calculons

$$u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) \leq \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{u_0^2}{u_0}\right) = u_0.$$

Par conséquent, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme toute suite décroissante et minorée converge, on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente. On conclut en utilisant le fait que f est continue, ce qui assure que la limite est nécessairement un point fixe de f, et donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}.$$

Exercice 2

a. Nous observons que f est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit donc de vérifier la continuité en 0.

On utilise pour cela le critère des limites. On calcule

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \arctan x = \arctan 0 = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0.$$

Puisque les limites à gauche et à droite existent et coïncident, nous concluons que f est continue en 0.

b. On observe que f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Remarquons que

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x \to 0^-} f'(x).$$

Comme f est continue en 0, ceci assure que f est dérivable en 0, et que sa dérivée est continue en 0.

c. On observe que f est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Remarquons que

$$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f''(x).$$

Comme f' est continue en 0, ceci assure que f est deux fois dérivable en 0, et que sa dérivée seconde est continue en 0.

d. Observons que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0}.$$

Comme arctan est dérivable en 0, nous déduisons de la définition de la dérivée que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \arctan' 0 = 1.$$