Analyse 2 INFO, printemps 2023
Solution du CC1 : sujet 1

Question de cours

a. Faux. Considérer par exemple

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

b. Faux. Considérer par exemple

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

c. Faux. Considérer par exemple $f(x) = |x|$.

Mentionnons cependant que les conditions des points b. et c. prises simultanément assurent la dérivabilité de f.

Exercice 1

a. Nous observons que f est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit donc de vérifier la continuité en 0.

On utilise pour cela le critère des limites. On calcule

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^x - 1 = \mathrm{e}^0 - 1 = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0.$$

Puisque les limites à gauche et à droite existent et coïncident, nous concluons que f est continue en 0.

b. On observe que f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Remarquons que

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x \to 0^-} f'(x).$$

Comme f est continue en 0, ceci assure que f est dérivable en 0, et que sa dérivée est continue en 0.

c. On observe que f est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec

$$f''(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cependant,

$$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0^-} f''(x).$$

Par conséquent, f n'est pas deux fois dérivable en 0.

d. Observons que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\exp x - \exp 0}{x - 0}.$$

Comme l'exponentielle est dérivable en 0, nous déduisons de la définition de la dérivée que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp' 0 = 1.$$

Exercice 2

a. On observe que

$$f(0) = \frac{1}{2} \arctan 0 = 0,$$

et donc 0 est un point fixe de f.

b. Il suffit de montrer que la fonction $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - f(x)$ est strictement croissante pour prouver que f n'admet pas d'autre point fixe. En effet, si tel est le cas, nous avons

$$g(x) > g(0) = 0 \quad \text{pour tout } x > 0 \quad \text{et} \quad g(x) < g(0) = 0 \quad \text{pour tout } x < 0.$$

Or, x est un point fixe de f si et seulement si $0 = x - f(x) = g(x)$. Par conséquent, si g est strictement croissante, alors f n'admet pas d'autre point fixe que 0.

Nous montrons que g est bel et bien strictement croissante à l'aide de la dérivée. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2(1+x^2)} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0,$$

ce qui assure que g est strictement croissante.

c. Il existe plusieurs façons de procéder. Si on se souvient du théorème du point fixe, on peut donner une réponse extrêmement rapide à la question. En effet, comme

$$|f'(x)| = \frac{1}{2(x^2+1)} \leq \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

on sait que f est contractante – on peut en fait prendre $k = \frac{1}{2} < 1$ dans la définition de contraction. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle fermé, le théorème du point fixe s'applique et garantit la convergence de la suite vers l'unique point fixe de f. Autrement dit,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Si on ne se souvient plus du théorème du point fixe, on peut démontrer à la main la convergence de la suite. En effet, comme $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, l'inégalité des accroissements finis assure que

$$|u_{n+1}| = |f(u_n) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|u_n - 0|.$$

Par récurrence, on en déduit que

$$|u_n| \leq \frac{1}{2^n}|u_0| \to 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ce raisonnement revient en fait à refaire la démonstration du théorème du point fixe dans le cas particulier de la suite fournie dans cet exercice.

Une troisième approche consiste à employer un argument de monotonicité. En effet, comme f est croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. De plus, comme f est bornée – en fait $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| \leq \frac{\pi}{4}$ – la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Comme f est continue, la limite est nécessairement un point fixe de f, ce qui assure que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$