Sol Ex

Pendant le CM 10
Correction CC2

4/04
Aricey
ANALYSE 2

Ex.1

$f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} \arcsin(x) & \text{si } \in]-1,0[\\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) $\forall x \in]-1,0[$, $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,0[$,
f est continue sur $]-1,0[$.
$\forall x \in]0,+\infty[$, $x \mapsto x\cdot e^x$ est $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ par produit de fonct. $\mathcal{C}^2$.
Donc f est continue sur $]0,+\infty[$.

Étude en 0 :
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \arcsin(x) = 0 = f(0)$ $\quad f(0)=0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} xe^x = 0 = f(0)$
Donc f est continue en 0, sur $]-1,+\infty[$

2) Par 1), f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \frac{\text{Arcsin}(h) - 0}{h-0}$

$g'(a) = \lim\limits_{h\to a} \frac{g(a+h)-g(a)}{h-a} = \frac{\text{Arcsin}(h-0) - \text{Arcsin}(0)}{h-0}$

$= \text{Arcsin}'(0)$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(0)^2}} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{he^h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} e^h = 1$

$l_g = l_d$ donc $f'(0)=1$ et f est dérivable en 0.

$\forall x \in]-1,+\infty[$, $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x<0 \\ e^x(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1 = f'(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} = e^0(0+1) = e^0 = 1$ $\square$.

f est $\mathcal{C}^1$.

3) Par 1), f est $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,+\infty[\setminus \{0\}$

$\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f'(h)-f'(0)}{h-0} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{h\cdot e^h + e^h - 1}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{h\cdot e^h}{h} + \frac{e^h - 1}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+} e^h + \frac{e^h - e^0}{h-0}$

$= 1 + \exp'(0)$

$= 2$

$\lim \frac{f'(h)-f'(0)}{h-0} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-h^2}} - 1}{h-0}$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\text{Arcsin}'(h) - \text{Arcsin}'(0)}{h-0}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{x}{(1-x)^{1/2}} = 0$

$\neq 2$

Donc f n'est pas dérivable en $f(0)$.
f n'est pas $\mathcal{C}^2$ en 0.

Ex.2

a) $I_1 = \int_1^e (\ln(x))^2 dx$ (par IPP) $\qquad \int_0 u^2 e^u du$

$\ln(x)^2 = f \circ g$ où $u(x) = \ln(x)^2 \Rightarrow u'(x)^2 = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$
$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

$I_1 = [x \ln(x)^2]_1^e - 2\int_1^e \frac{x\cdot \ln(x)}{x} dx \qquad \ln(x)^2 dx \quad$ où $f = x^2$
$g =$

$= e \times 1 - 0 - 2[x - x\ln x]_1^e$
$= e - 2e + 2e + 2$
$= e \pm 2$

b) $I_2 = \int (\sin(x))^2 \, dx$

$$\begin{cases} \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1 \\ \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(2x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin(x)^2 = 1 - \cos(2x) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(2x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$

$\sin(2x) = 2\cos(2x)$

$$I_3 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$x = \sin u \qquad u = \text{Arcsin}(x), \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow u = \frac{\pi}{4} \qquad 0 = \sin(0) \Rightarrow u = 0$

$$\int \sin(u)^2 \, du = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\pi/4}$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Ex.3

a) Factoriser

$P(X) = X^3 + X^2 - 7X - 15$

$P(3) = 27 + 9 - 21 - 15$

$= 36 - 36$

$= 0$

$(X-3) \mid P$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{X^3} + X^2 - 7X - 15 & X-3 \\ -(\cancel{X^3 - 3X^2}) & X^2 + 4X + 5 \\ \cancel{4X^2} - 7X - 15 & \\ -\cancel{4X^2 - 12X} & \\ \cancel{5X - 15} & \\ -\cancel{5X - 15} & \\ 0 & \end{array}$$

$0 \rightarrow$ Forcément! ⚠

Donc $P(X) = (X-3)(X^2+4X+5)$

b) DES

Soit $F(X) = \frac{X^2+6X-1}{(X-3)(X^2+4X+5)}$

$\deg F < 0$. Donc $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^2$ t.q. : $F(X) = \frac{a}{X-3} + \frac{bX+c}{X^2+4X+5}$

$$(X-3)F(X) = \frac{X^2+6X-1}{X^2+4X-5} = a + (X-3) . \frac{bX+c}{X^2+4X+5}$$

Pour $X = 3$, $\frac{26}{26} = 1 = a$

$F(0) = \frac{1}{15} = -\frac{1}{3} + \frac{c}{5}$

$\Rightarrow \frac{c}{5} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{c}{5} = \frac{6}{15}$

$\Rightarrow c = \frac{6}{3} = 2$

$F(1) = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$

$F(1) = -\frac{1}{2} + \frac{b+2}{10} = \frac{-3+b}{10}$

Donc $b = 0$

$F(X) = \frac{1}{X-3} + \frac{2}{X^2+4X+5}$

c)

$$\int_{-5}^0 F(X) \, dx = \int_{-5}^0 \frac{1}{x-3} \, dx + 2\int_{-5}^0 \frac{1}{x^2+4x+5} \, dx$$

$$= \left[\ln|x-3|\right]_{-5}^0 + 2\int_{-5}^0 \frac{1}{\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2}+1} \, dx$$

$$= \ln 3 - \ln 8 + 2\int_{-5}^0 \frac{1}{1+(x+2)^2} \, dx$$

$$= \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2 \left[\text{Arctan}(x+2)\right]_{-5}^0$$

$$= \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2\,\text{Arctan}(2) - 2\,\text{Arctan}(-3)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2\,\text{Arctan}(2) + 2\,\text{Arctan}(3)$$

= Bonus = $\quad 2 \times 3 = 6 > 1 \quad$ cf CM8

$\Rightarrow \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3)$

$= \text{Arctan}\left(\frac{2+3}{1+2\times3}\right) + \text{sgn}(2)\pi$

$= \text{Arctan}(-1) + \pi$

$= -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$$\int_{-5}^0 F(x)\,dx = \ln\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{3\pi}{2} \quad \square.$$