Sol Ex

Pendant le CM 10
Fiche de TD 5, Ex. 28

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

a) On note (H). $y'' + 2y' + 5y = 0$
On cherche l'ensemble des solutions de (H)
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2.
L'éq. caractéristique associée à (H) est $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$
$\Delta = 4 - 4(1)5 = -16 < 0$
(E) $\lambda_1 = -\frac{2+4i}{2} = -1+2i$
$\lambda_2 = -1-2i$

Rappel: cas 1 : l'éq. caract. a 2 racines distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
L'ensemble des sol. $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, $A, B \in \mathbb{C}$

cas 2 : L'éq. caract. a 1 racine double $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. qd $\Delta = 0 \Rightarrow$ 1 seule racine
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (Ax+B)e^{\lambda x}$, $A, B \in \mathbb{C}$.

Donc l'ensemble des solutions de (H) est :
$\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \underbrace{Ae^{(-1+2i)x}}_{f} + \underbrace{Be^{(-1-2i)x}}_{g},\ A, B \in \mathbb{C} \}$

$= \text{Vect}\{f, g\}$

L'ensemble des solutions de H est un sev des fonctions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de dim 2 :
Donc $x \mapsto e^{(-1+2i)x}$, $x \mapsto e^{(-1-2i)x}$ forme une base de l'ensemble à valeurs ds $\mathbb{C}$ (H).

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ t.q. $\alpha \cdot e^{(-1+2i)x} + \beta \cdot e^{(-1+2i)x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Pour $x = 0$, $\alpha + \beta = 0$
$\alpha \cdot e^{-i} e^{2ix} + \beta \cdot e^{-1} e^{-2ix} = e^{-1x}\left(\alpha e^{2ix} + \beta e^{-2ix}\right) = 0$
$\Rightarrow \left(\alpha e^{2ix} + \beta e^{-2ix} = 0\right)$
$x = \frac{\pi}{4}$ $\quad \alpha \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} + \beta \cdot e^{-i\pi/2} = \alpha \cdot i - i\beta = 0$
D'où, $i(\alpha - \beta) = 0$
Donc, $\alpha - \beta = 0\ (2)$
Donc $\alpha = \beta = 0$, (f, g) forme une famille libre.

On cherche A et B t.q.
$y(x) = A \cdot e^{-x} e^{2ix} + \beta e^{-x} e^{-2ix} \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
si $Ae^{-2ix} + Be^{-2ix} \in \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

Posons (*) — des cstes complexes.
$A = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$B = x' + iy'$, $x', y' \in \mathbb{R}$

$(*) = (x+iy)(\cos(2x) + i\sin(2x)) + (x'+iy')(\cos(2x) - i\sin(2x))$
$= x\cos(2x) + \underbrace{x\, i\sin(2x)}_{} + \underbrace{iy\cos(2x)}_{} - y\sin(2x) + x'\cos(-2x) - \underbrace{x' i\sin(2x)}_{} + \underbrace{iy'\cos(2x)}_{} + y'\sin(2x)$

$\begin{cases} x - x' = 0 \\ y - y' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ D'où $A = \overline{B}$ — ils st conjugués.

$\overset{!}{=} 0$

$\begin{cases} \cos(2x)(y+y') = 0 \\ \sin(2x)(x-x') = 0 \end{cases} \overset{!}{=} 0$ pour avoir $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $y(x) = Ae^{(-1+2i)x} + Be^{(-1+2i)x}$, $x \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{C}$ d'après a).

Les solut° à valeurs réels st $x \mapsto \mathrm{Re}(y(x))$. $A = a+ib$, $B = a'+ib'$, $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$

$$y(x) = (a+ib)e^{-x}(\cos(2x) + i\sin(2x)) + (a'+b')e^{-x}(\cos(2x) - i\sin(2x))$$

$$\mathrm{Re}(y(x)) = a \cdot e^{-x}\cos(2x) - b \cdot e^{-x}\sin(2x) + a' e^{-x} \cdot \cos(2x) + b \cdot e^{-x}\sin(2x)$$

$$= \boxed{\cos(2x)e^{-x}\underbrace{(a+a')}_{C} + \sin(2x)e^{-x}\underbrace{(b'-b)}_{C'}}$$

$C = a + a' = \mathrm{Re}(A+B)$

$C' = b' - b = \mathrm{Im}(B-A)$

L'ensemble ds solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (H) est un sev des fonctions $\mathcal{C}^2$ $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ de dim 2. → D'après le cours

L'ensemble des solutions de (H) à valeurs réelles,

$$\{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto C \cdot e^{-x}\cos(2x) + C' e^{-x}\sin(2x) \mid C, C' \in \mathbb{R}\}$$

Une basse de l'ensemble des solutions à valeurs réelles est

$$(x \longmapsto e^{-x}\cos(2x),\quad x \longmapsto e^{-x}\sin(2x)).$$