

ANALYSE 2 INFO, printemps 2023

Fiche TD n°6,

Développements limités et formules de Taylor

Exercice : Les exercices le plus importants, résolus en SolEx.

Exercice : Fait pendant le TD.

Exercice : La partie soulignée faite pendant le TD.

Exercice : A faire à la maison.

Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cet UE.

La règle de l'Hôpital

Exercice 1. En utilisant la règle de l'Hôpital, trouver les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2 \sin(2x)}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Exercice 2. En utilisant la règle de l'Hôpital, trouver les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \cdot \ln(1-x)}{e^x - 1}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \cos(2\pi x)^{\frac{1}{x}}.$$

Fonctions équivalentes, négligeables ou dominées

Exercice 3. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

$$\begin{array}{lll} 1. x^2 + x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. & 7. 1 = o(x)_{x \rightarrow 1}. & 13. x = o(x)_{x \rightarrow +\infty}. \\ 2. x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x. & 8. x^2 = o(x)_{x \rightarrow +\infty}. & 14. x^5 + x^2 + x = o(x^5)_{x \rightarrow 0}. \\ 3. x^2 = o(x)_{x \rightarrow 0}. & 9. x^2 = O(x)_{x \rightarrow 0}. & 15. x^5 + x^2 + x = o(x)_{x \rightarrow 0}. \\ 4. x = o(x)_{x \rightarrow 0}. & 10. x = O(x)_{x \rightarrow 0}. & 16. e^x = o(\ln(|x|))_{x \rightarrow +0}. \\ 5. 1 = o(x)_{x \rightarrow 0}. & 11. 1 = O(x)_{x \rightarrow 0}. & 17. 2x + 1 = o(x)_{x \rightarrow +\infty}. \\ 6. x^2 = o(x)_{x \rightarrow 1}. & 12. x^2 = O(\frac{1}{2}x^2)_{x \rightarrow 0}. & 18. x^2 = o(x^3)_{x \rightarrow 0}. \end{array}$$

Exercice 4. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

$$\begin{array}{ll} 1. \sin(x) = o(x)_{x \rightarrow 0}, & 3. 2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = o(x)_{x \rightarrow 0}, \\ 2. \sin(x) = o(x)_{x \rightarrow +\infty}, & 4. \ln(|x|) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)_{x \rightarrow 0+}. \end{array}$$

Exercice 5. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes :

1. $x^4 + 5x^2 - 6x$ en 0 et en $+\infty$.
2. $\sqrt{x} + \ln(x)$ en 0 et $+\infty$.
3. $x + \sin(x)$ en 0 et $+\infty$.
4. $x^7 + \sqrt{x} + \ln(x)^2 + e^{2x} + 4x^5 + 5^{x+1}$ en $+\infty$.

Exercice 6. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$.
2. $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + 2x$.
3. $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 0$.
4. $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
5. $e^{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$.
6. $e^{x^2} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Les développements limités (surtout en 0)

On rappelle la formule de Taylor-Young. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur l'intervalle I ouvert I et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n).$$

Exercice 7. Donner par un calcul direct le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1. $3 + \ln(1 + x + x^2)$.
2. $\exp(\cos(x))$.
3. $1 + \tan(x)$.

Exercice 8. Donner par un calcul direct puis en utilisant le formulaire un développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(3 \cos(x))$.
2. $\sqrt{1 + \exp(2x)}$.

Exercice 9. En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(2 + x)$.
2. $\frac{1}{2+x}$.
3. $\sqrt{2+x}$.

Exercice 10. En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(3 - x)$.
2. $\frac{1}{3+x}$.
3. $\sqrt{4+x}$.

Exercice 11. En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(1+x) \sin(x)$.
2. $\ln(1 + \sin(x))$.
3. $\frac{\sin(x)}{1 + \ln(1+x)}$.

Exercice 12. En utilisant le formulaire, donner le développement limité à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(1+x) \cos(x)$.
2. $\ln(1 + \cos(x))$.
3. $\frac{\cos(x)}{1 + \ln(1+x)}$.

Exercice 13. En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $(1-x)^3$. | 3. $\frac{\ln(1+x)}{e^x \sin(x)}$. |
| 2. $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$. | 4. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$. |

Exercice 14. En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $(1-x)^4$. | 3. $\frac{\ln(1+x)}{e^x \cos(x)}$. |
| 2. $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. | 4. $(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$. |

Exercice 15. Si elles existent, calculer les limites suivantes en utilisant un développement limité :

- | | |
|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin(x)}{x^2 + \sin(2x)}$. | 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$. |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$. | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1 + \sin(x))}{x^2}$. |

Exercice 16. Si elles existent, calculer les limites suivantes en utilisant un développement limité :

- | | |
|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1 + \sin(x)) - x}$. | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x)^4} \left(\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} \right)$. |
|--|---|

Exercice 17.

- Donner le développement limité à l'ordre 3 de $x^2 \ln(x)$ au voisinage de $x = 1$.
- Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\sin(x)$ au voisinage de $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 18.

- Donner le développement limité à l'ordre 3 de $e^{\sqrt{x}}$ au voisinage de $x = 1$.
- Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\cos(x)$ au voisinage de $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 19.

Considérer la fonction $f: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{1/x} \sqrt{x^2 - 1}$.

- Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

- En déduire que la droite $y = x + 1$ est asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 20.

Considérer la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$.

- Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

- En déduire que la droite $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$.

Quelques applications de la formule de Taylor-Lagrange

On rappelle la formule de Taylor-Lagrange. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Exercice 21. On considère $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre n entre 0 et x .

Indication : Montrer, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

3. En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.
4. En utilisant la question 2, montrer que pour tout $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$.

Exercice 22.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour \exp à l'ordre n entre 0 et 1.
2. En déduire que pour $n \geq 2$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

3. Montrer que e est irrationnel.

Indication : Supposer par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et appliquer la question 1) pour un entier n bien choisi.

Exercice 23.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour \cos à l'ordre n entre 0 et x .
2. En déduire une valeur approchée de $\cos\left(\frac{\pi}{32}\right)$ à 10^{-5} près.

Exercice 24.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour \sin à l'ordre n entre 0 et x .
2. En déduire une valeur approchée de $\sin\left(\frac{\pi}{32}\right)$ à 10^{-5} près.

Exercice* 25. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que f'' n'est pas majorée par 4.

Exercice* 26. (Inégalité de Komolgorov) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On suppose que f et f'' sont bornées sur \mathbb{R} et on note $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2.$$

2. En déduire que f' est bornée sur \mathbb{R} et que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2M_0 M_2.$$

Formulaire de développements limités

Les développements limités ci-dessous sont valables quand x tend vers 0 et uniquement dans ce cas.

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+1}) \text{ et même } O(x^{2n+2}))$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+2}) \text{ et même } O(x^{2n+3})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+1}) \text{ et même } O(x^{2n+2})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+2}) \text{ et même } O(x^{2n+3})) \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} (1+x)^a \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (a \text{ réel donné}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k + o(x^n) \text{ et en particulier } (1+x)^a \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + ax + o(x) \text{ et donc } \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \end{aligned}$$

.....

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+2}) \text{ et même } O(x^{2n+3})) \end{aligned}$$

Les développements en 0 de Arcsin et de tan et th ne font pas partie du cours mais constituent une activité classique en classe préparatoire.

Formulaire d'équivalents usuels

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad \ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\arccos(x) \underset{x \rightarrow 1, x < 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x},$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x, \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad \sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

Les théorèmes de croissances comparées

$$\forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}, x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(a^x)$$

$$\forall q > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}, n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(q^n)$$

$$\forall a \in]0, 1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, a^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$$

$$\forall q \in]0, 1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, q^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^\alpha)$$

$$\forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}, a^x \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o(|x|^\alpha)$$

$$\forall a > 1, \forall \alpha > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}, \log_a^\beta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$$

$$\forall a > 1, \forall \alpha > 0, \log_a^\beta(x) \underset{x \rightarrow 0, x > 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad (\text{ou encore } x^\alpha \log_a^\beta(x) \underset{x \rightarrow 0, x > 0}{\rightarrow} 0)$$

Quand n tend vers $+\infty$,

$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt[3]{n} \ll \sqrt{n} \ll n \ll n \ln(n) \ll n\sqrt{n} \ll n^2 \ll (1,01)^n \ll n! \ll n^n$$

et aussi,

$$1 \gg \frac{1}{\ln(\ln(n))} \gg \frac{1}{\ln(n)} \gg \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \gg \frac{1}{\sqrt{n}} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n \ln(n)} \gg \frac{1}{n\sqrt{n}} \gg \frac{1}{n^2} \gg \frac{1}{(1,01)^n} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n^n}$$