Les Solution des équations différentielles linéaires

(Algèbre → Analyse) 28/03

Aricey

ANALYSE 2

Problèmes Homogènes

Soit $\mathcal{E} := \{ f \in C^n(I) \mid f^{(n)} + a_{n-1} \cdot f^{(n-1)} + \dots + a_2 \cdot f'' + a_1 \cdot f' + a_0 \cdot f = 0 \}$ – l'ensemble des solutions d'une éq. diff. lin. d'ordre n. ⊛

$n, N \in \mathbb{N}^*$ I intervalle ouverte et $a_0, \dots, a_{n-1} \in C^0(I)$

Thrm: 1) $\mathcal{E} \subseteq C^n(I)$ (Sev)

2) $\dim(\mathcal{E}) = n$

Preuve: de 1)

On définit $\Psi : C^n(I) \to C^0(I)$, $f \mapsto f^{(n)} + a_{n-1} \cdot f^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot f' + a_0 \cdot f$

Alors on voit que $\mathcal{E} = \ker(\Psi)$ □.

Rq: Preuve de 2) surpasse notre cours ici, mais c'est extrement important en pratique

Corollaire 1: Les solutions de $\boxed{y' + a \cdot y = 0}$ $(a \in C^0(I))$ forment un ev. dim 1.

Rappel: En Analyse on avait un thm que $y' + a \cdot y = 0 \iff \exists C \in \mathbb{R}$ t.q. $y = C \cdot \exp(-A(x))$ pour un A t.q. $A' = a$.

On a seulement démontré en Analyse que $y = \exp(-A)$ est une solution de $y' + a \cdot y = 0$, avec le corollaire on a que $\exp(-A)$ forme une base de $\mathcal{E} = \{ y \in C^1 \mid y' + a \cdot y = 0 \}$ qui montre le reste.

Corollaire 2: Les solutions de $\underbrace{\boxed{y'' + py' + qy = 0}\ p, q \in \mathbb{R}}_{⊛}$, formant un ev de dim 2

Par conséquence, si l'on trouve des solutions f_1 et f_2 de ⊛ t.q $f_2 \neq 0$ (la fonct° nulle) et $\nexists \alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $f_1 = \alpha \cdot f_2$ ($\iff \forall x \in I$, $f_1(x) \neq \alpha \cdot f_2(x)$).

On a une base des solutions de ⊛,

alors y satisfont ⊛ $\iff \exists A, B \in \mathbb{R}$, t.q. $y = A \cdot f_1 + B \cdot f_2$

Exple: (Exercice II.9) f_1 et f_2 t.q. $f_1(x) = \sin(2x)$ et $f_2(x) = \cos(2x)$ forment une base pour l'esp. vect. des solutions de $y'' + 4y = 0$ (□), alors y satisfait (□) $\iff \exists A, B \in \mathbb{R}$ t.q. $y(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x)$.

Rq: $f_1 = \overset{\text{composé}}{\sin \circ g}$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$

$f_2 = \cos \circ g$

$y = A \cdot f_1 + B \cdot f_2 \equiv A(\sin \circ g) + B(\cos \circ g)$

Déf: On appelle $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ qui est une base de $\mathcal{E}$ un système fondamentale de ⊛

Rq: Si $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est un système fondamentale, alors $y \in \mathcal{E} \iff \exists (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^n$ t.q. $y = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i$.

Problèmes en homogènes - des solutions Particulières et Générales :

Soit $f : E \to F$ et $b \in F$, alors pour résoudre $f(x) = b$ | on fait comme ça.

Rq: Si $b \neq 0$ alors l'ensemble $A = \{ x \in E \mid f(x) = b \}$ n'est pas un esp. vect (car $0_E \notin A$).

Soit $x_0 \in A$, alors $x = x_0 \in E$ est une solution de $f(x) = b$,

alors $x \in A \iff \underset{\text{la solut° générale}}{x} = \underset{\text{une sol. particulière}}{x_0} + x_{hom}$ où $\underset{\text{la solution générale du pb. homogène}}{x_{hom}} \in \ker(f)$

Preuve: Soit x_1 et $x_2 \in A$

alors $f(x_1) = b$ et $f(x_2) = b$

$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = b - b = 0$

alors la différence de deux solutions est ds $\ker(f)$.

Page Supplémentaire

Rappel: E,F evs alors $f: E \to F$ lin $\Longleftrightarrow$ $\forall (u_1, \dots, u_k) \in E^k$, $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$: $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(u_i)$

$$S := \{x \in E \mid f(x) = b\}, \quad Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} \underset{sev}{\subseteq} E$$

ensemble des solutions (de $f(x) = b$) pas de ev. (car $0_E \notin S$).

Ex. 1 $E := \mathbb{R}^3$, $F := \mathbb{R}^3$
$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+y+z \\ x+3y+5z \end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$ (G) CM1

si $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \emptyset$, si $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $S \neq \emptyset$

Ex. 2 $\Psi: C^n(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R})$, $y \longmapsto L[y]$ avec $L = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$

Opérateur différentielle
$(a_0, \dots, a_n) \in (C^0(\mathbb{R}))^n$ ou $\in \mathbb{R}^n$

une appl. lin.
, $b \in C^0(\mathbb{R})$
S... l'ensemble de solutions $L[y] = b$

Prop: 1) $S \neq \emptyset \Longleftrightarrow b \in im(f)$.
2) Soit $S \neq \emptyset$ et $x_p \in S$, alors
$\forall x \in S$ $\exists (!)$ $x_h \in Ker f$ t.q. $x = x_p + x_h$

Preuve:
1) Évident
2) $\left.\begin{matrix} f(x) = b \\ f(x_p) = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x - x_p) = 0$
$\Rightarrow x - x_p = x_h \in Ker(f)$

Rq:
- Le 1) en pratique n'est pas important pour les éq's diff. ($\Leftarrow$ Thm. fond. d'analyse) ($y' = b \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists y \in C^1(\mathbb{R})$).
Par contre, pour les systèmes lins. $A \cdot x = b$ c'est bien important.
Ds ce cas,

Lemme: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \longmapsto Ax$
$$b \in im(f) \Longleftrightarrow rg(A) = rg((A,b))$$
matrice étendue.

Preuve: (Rappel)
1) $rg(A) = \dim(im(f))$
2) $im(f) = Vect(v_1, \dots, v_n)$ où $A = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ $(v_i \in \mathbb{R}^m)$
$rg((A,b)) = \dim(Vect(v_1, \dots, v_n, b))$
$Vect(v_1, \dots, v_n) \underset{(sev)}{\subseteq} Vect(v_1, \dots, v_n, b)$
et égalité ssi $b \in Vect(v_1, \dots, v_n) = im(f)$ et aussi ssi les m̂ dims.

- Le 2) est particulièrement important pour des éqs. diff. x_p solution particulière, x_h solution homogène.