Analyse 2 pour informaticiens

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Fiche de TD 3

Exercice 8.

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes linéaires $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ordre 2 définies par :

1. $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

1. L'équation caractéristique de $2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0$ est $2x^2 - 3x + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 > 0$, donc le terme général de la suite est de la forme

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

où r_1 et r_2 sont les racines réelles de l'équation caractéristique. Ici, $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{1}{2}$. Donc

$$u_n = \lambda + \mu 2^{-n}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Reste à déterminer λ et μ. On utilise pour cela les conditions initiales. Comme

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 1, \\ u_1 = \lambda + \frac{\mu}{2} = -1, \end{cases}$$

on trouve $\lambda = -3$ et $\mu = 4$. Ainsi,

$$u_n = -3 + 2^{2-n}.$$

2. L'équation caractéristique de $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$ est $x^2 - 4x + 4 = 0$, de discriminant $\Delta = 0$, donc le terme général de la suite est de la forme

$$u_n = (\lambda + \mu n) r^n, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

où r est la racine double de l'équation caractéristique. Ici, $r = 2$. Donc

$$u_n = (\lambda + \mu n) 2^n, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Reste à déterminer λ et μ. On utilise pour cela les conditions initiales. Comme

$$\begin{cases} u_0 = \lambda = 1, \\ u_1 = 2(\lambda + \mu) = 0, \end{cases}$$

on trouve $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. Ainsi,

$$u_n = (1 - n) 2^n.$$

3. L'équation caractéristique de $u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$ est $x^2 - x + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = -3 < 0$, donc le terme général de la suite est de la forme

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

où r_1 et r_2 sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique. Ici, $r_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $r_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Donc

$$u_n = \lambda e^{in\frac{\pi}{3}} + \mu e^{-in\frac{\pi}{3}}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Reste à déterminer λ et μ. On utilise pour cela les conditions initiales. Comme

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 1, \\ u_1 = \lambda e^{i\frac{\pi}{3}} + \mu e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2, \end{cases}$$

on trouve $\lambda = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $\mu = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Ainsi,

$$u_n = e^{i(n-1)\frac{\pi}{3}} + e^{-i(n-1)\frac{\pi}{3}} = 2\cos\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right).$$