① a) $$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \qquad (*)$$

$$\left[(*)\cdot x^2\right]\Big|_{x=0} \Rightarrow \underline{-1 = B}.$$

$$\left[(*)\cdot(1+x^2)\right]\Big|_{x=i} \Rightarrow \left.\underbrace{\frac{i-1}{-1}}_{1-i} = Ci+D \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{C=-1} \\ \underline{D=1} \end{array}$$

$$(*)\Big|_{x=1} \Rightarrow 0 = A+B+\frac{C+D}{2} \rightarrow \underline{A=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1-x}{x^2+1}}$$

b) $$\boxed{\int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}\,dx} = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x} + \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\boxed{= \arctan(x) + \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C}$$

② a) $\boxed{I = \int_1^2 x^3 \ln(x)\,dx} = \left[\frac{x^4}{4}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$u' = x^3 \quad v = \ln(x)$

$u = \frac{x^4}{4} \quad v' = \frac{1}{x}$

$= 4\ln(2) - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3\,dx = 4\ln(2) - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^2 =$

$= 4\ln(2) - 1 + \frac{1}{16} = \boxed{\ln(16) - \frac{15}{16}}$

b) $\boxed{J = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\,dx} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(u)\,du =$

$u = x^2$

$du = 2x\,dx$

x	u
$\sqrt{\pi}$	π
0	0

$= \frac{1}{2}\left[-\cos(u)\right]_0^{\pi} = \boxed{1}$

③ a) $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0 \quad (*)$

$\rightarrow$ éq. caractéristique $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad (\square)$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

<u>Sol. gén.</u> de $(*)$: $u_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n \quad (**)$

Cond. init. : $\left.\begin{array}{l} u_0 \overset{(**)}{=} A + B \overset{!}{=} 1 \\ u_1 = 2A + 3B \overset{!}{=} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 3 \\ B = -2 \end{array}$

$\Rightarrow$ sol. : $\boxed{u_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n}$

b) $y'' - 5y' + 6y = 0 \Rightarrow$ la même éq. car. $(\square)$!

$\Rightarrow$ <u>sol. gén.</u> : $y(x) = A \cdot e^{2x} + B \cdot e^{3x} \quad (***)$

Cond. init. : $\left.\begin{array}{l} y(0) \overset{(***)}{=} A + B \overset{!}{=} 1 \\ y'(0) = 2A + 3B \overset{!}{=} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 3 \\ B = -2 \end{array}$

La <u>solution</u> : $\boxed{y(x) = 3 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{3x}}$

4 a) $y' + \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)} y = 0$

$$\int \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)}\,dx = +\ln(2+\sin x)$$

$$\boxed{y_h = C\exp\left(-\ln(2+\sin x)\right) = \frac{C}{2+\sin x}}$$

b) $y_p = \frac{C(x)}{2+\sin x}$

$$(2+\sin x)\cdot y_p' + \cos(x) y_p = (2+\sin x)\frac{C'}{2+\sin x} \overset{!}{=} e^x$$

$$\Leftrightarrow C'(x) = e^x \Leftarrow C(x) = e^x \quad \boxed{y_p = \frac{e^x}{2+\sin x}}$$

c) $y = \frac{C+e^x}{2+\sin x}$, $C \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow y(0) = \frac{C+1}{2} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow C = -1$$

$$\boxed{y(x) = \frac{e^x - 1}{2+\sin x}}$$

⑤ $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+\sin x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x\right) + o(x^2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+\sin x)}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

⑥ a) M.q. $\boxed{|\cos y - \cos x| \leq |y-x|}_{(*)}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

si $x = y$ ✓. $x \neq y$ **TAF** pour cos et l'intervalle $[x, y]$ (si $y > x$) / $[y, x]$ si $x > y$:

$\exists\, c$ entre x et y t.q. $-\sin(c) = \dfrac{\cos y - \cos x}{y - x}$

$$\Rightarrow \frac{|\cos y - \cos x|}{|y-x|} \leq 1 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y$$

$\Rightarrow (*)$.

b) $y = 0,\ x = 0.01 \overset{(*)}{\Longrightarrow} |\underbrace{1 - \cos(0.01)}_{\geq 0}| \leq 0.01 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{0.99 \leq \cos(0.01)}$$

c) $\exists c$ entre 0 et x t.q.

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cos(c)\frac{x^4}{4!}} \quad (**)$$

d) $A := 1 - \frac{(0.01)^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 0.0001 =$

$$= 1 - 0.00005 = 0.99995$$

$$(**) \Rightarrow \left|\cos(0.01) - A\right| = |\cos(c)|\frac{(0.01)^4}{4!} \leq$$

$$\leq \frac{10^{-8}}{24} \leq 10^{-9} \left(\leq 10^{-8} \right)$$

$\Rightarrow \boxed{\cos(0.01) \approx 0.99995}$ avec une erreur plus petit que $10^{-9}/10^{-8}$.

Remarques:

1 pour résoudre (*), route alternative :

$(*) \Rightarrow X-1 \overset{!}{=} A\cdot X\cdot(X^2+1)+B(X^2+1)+(CX+D)X^2 =$

$= (A+C)X^3+(B+D)X^2+A\cdot X+B$

$\Leftrightarrow B=-1,\ A=1,\ B+D=0,\ A+C=0$

$\hookrightarrow D=1,\ C=-1$

3 • 3 points si a) <u>ou</u> b) fait complètement

(car la même éq. caracteristique et les même conditions sur les constantes A et B).

• pour résoudre $(\Delta)\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+3B=0 \end{cases}$ <u>soit</u> on

élimine une variable par une éq. (p.e. $B=1-A$)

<u>soit</u> $(\Delta) \Leftrightarrow M\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

alors $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$

⑤ aussi possible par 2 fois de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+\sin x)}{x^2} \overset{1)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{\cos x}{1+\sin x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\,(1+\sin x) - \cos x}{2x\cdot(1+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot \sin x}{2x\cdot(1+\sin x)} \overset{2)}{=}$$

$$\overset{2)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{2(1+\sin x) + 2x\cdot\cos x} = \frac{1}{2}.$$

⑥ $\cos(0.01) = \underline{0.99995000\,0}416665$

$10^{-9} = \underline{0.000000001}$

$A = \underline{0.999950000}$

c'est impressionnant que l'approximation de cos par un polynôme de Taylor de degré deux seulement donne une si bonne valeur à $\frac{1}{100}$.