Correction CC2 Analyse 2

30 mars 2022

Exercice 1 : Dérivabilité

$$f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \arcsin(x), & \text{si } -1 < x < 0 \\ xe^x, & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
   Quand $x \neq 0, f$ est une composée de fonctions usuelles continues et dérivables.
   Étudions la continuité en 0.
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \arcsin(x) = 0 \qquad f(0) = 0e^0 = 0$$
   Ainsi f est continue en 0.
2. La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, sa dérivée est-elle continue ?
   Étudions la dérivabilité en 0.
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x - 0e^0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1$$
   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\arcsin(x) - 0e^0}{x-0} = \frac{\arcsin(x) - \arcsin(0)}{x-0} = \arcsin'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$$
   Ainsi f est dérivable et on obtient donc :
   $$f' :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$$
   $$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } -1 < x < 0 \\ e^x + xe^x, & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
   Quand $x \neq 0$, f' est une composée de fonctions usuelles continues et dérivables.
   Étudions la continuité de f' en 0.
   $$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x + xe^x = 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \qquad f'(0) = e^0 + 0e^0 = 1$$
   Ainsi f' est bien continue.
3. La fonction f est-elle deux fois dérivable ? Si oui, sa dérivée est-elle continue ?
   Étudions la dérivabilité de f' en 0.
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = f''(0) = e^0 + e^0(0+1) = 2$$
   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - (e^0 + 0e^0)}{x-0} = f''(0) = 0$$
   Ainsi f' n'est pas deux fois dérivable.

Exercice 2 : Intégrales 1

1. Calculer
$$I = \int_1^e (\ln(x))^2 \; \mathrm{d}x$$
On pose le changement de variable
$$\begin{cases} u = \ln(x), \; \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \; \mathrm{d}x \\ x = e^u, \; \mathrm{d}x = e^u \; \mathrm{d}u \end{cases}$$
$$I = \int_0^1 u^2 e^u \; \mathrm{d}u$$
On procède à une intégration par parties :
$$\begin{cases} f(u) = u^2, \; g'(u) = e^u \\ f'(u) = 2u, \; g'(u) = e^u \end{cases}$$
$$I = [u^2 e^u]_0^1 - 2\int_0^1 ue^u \; \mathrm{d}u$$
Pour l'intégrale restante, on procède également à une intégration par parties.
$$\begin{cases} f(u) = u, \; g'(u) = e^u \\ f'(u) = 1, \; g(u) = e^u \end{cases}$$
$$\begin{aligned} I &= e - 2\left([ue^u]_0^1 - \int_0^1 e^u \; \mathrm{d}u\right) \\ &= e - 2\left(e - [e^u]_0^1\right) \\ &= e - 2\left(e - e + 1\right) \\ &= e - 2 \end{aligned}$$
2. Calculer
$$I = \int (\sin(x))^2 \; \mathrm{d}x$$
On procède à une intégration par parties.
$$\begin{cases} u(x) = \sin(x), v'(x) = \sin(x) \\ u'(x) = \cos(x), v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$
$$I = [-\sin(x)\cos(x)] + \int (\cos(x))^2 \; \mathrm{d}x$$
Or on sait que $(\cos(x))^2 = 1 - (\sin(x))^2$
$$\begin{aligned} I &= -\sin(x)\cos(x) + \int 1 \; \mathrm{d}x - I \\ 2I &= -\sin(x)\cos(x) + x \\ I &= \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2} + C, \; C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
3. Calculer
$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \; \mathrm{d}x$$

Indication : Utiliser le changement de variable $x = \sin(u)$
En employant le changement de variable suggéré, on a :

$$\begin{cases} x = \sin(u), \ \mathrm{d}x = \cos(u)\ \mathrm{d}u \\ u = \arcsin(x), \ \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(u))^2\ \mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{0 - \sin(0)\cos(0)}{2} \\ &= \frac{\frac{\pi}{4} - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{2} \\ &= \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{4}}{2} \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 3 : Intégrales 2

$$I = \int_{-5}^{0} \frac{x^2 + 6x - 1}{x^3 + x^2 - 7x - 15}\ \mathrm{d}x$$

1. Factoriser $P(X) = X^3 + X^2 - 7X - 15$.
   D'après le théorème fondamental de l'algèbre, P est factorisable sur $\mathbb{R}$. Utilisons le théorème suivant vu en cours :
   Théorème. *Soit* $P(X) \in \mathbb{Z}[X] \iff P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \ a_k \in \mathbb{Z}$.

   $$\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ P\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \implies p \mid a_0 \ \textit{et}\ q \mid a_n$$

   Ici le coefficient a_n est 1 ($\implies q = 1$ car 1 est son seul diviseur), on sait donc que la racine est un entier multiple du coefficient a_0 qui est -15. On sait donc que les racines de P sont des diviseurs de -15. On cherche donc une racine dans $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$ et on trouve que 3 est une racine de P.

   $$P(X) = (X - 3)(X^2 + 4X + 5)$$

   $(X^2 + 4X + 5)$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.
2. Décomposer $F(X) = \frac{X^2+6X-1}{X^3+X^2-7X-15}$ en éléments simples.

   $$F(X) = \frac{X^2 + 6X - 1}{X^3 + X^2 - 7X - 15} = \frac{X^2 + 6X - 1}{(X-3)(X^2 + 4X + 5)}$$

   D'après le théorème de décomposition en éléments simples :

   $$\frac{X^2 + 6X - 1}{(X-3)(X^2 + 4X + 5)} = \frac{A}{X - 3} + \frac{BX + C}{X^2 + 4X + 5} \tag{1}$$

   $$(1) \cdot (X - 3) \iff \frac{X^2 + 6X - 1}{(X^2 + 4X + 5)} = A + \frac{(BX + C)(X - 3)}{(X^2 + 4X + 5)}$$

En $X = 3$, on obtient $A = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{X^2+6X-1}{(X-3)(X^2+4X+5)} &= \frac{1}{X-3} + \frac{BX+C}{X^2+4X+5} \\
\iff \frac{(X^2+6X-1)-(X^2+4X+5)}{(X-3)(X^2+4X+5)} &= \frac{BX+C}{X^2+4X+5} \\
\iff \frac{2X-6}{(X-3)(X^2+4X+5)} &= \frac{BX+C}{X^2+4X+5} \\
\iff \frac{2(X-3)}{(X-3)(X^2+4X+5)} &= \frac{BX+C}{X^2+4X+5} \\
\iff \frac{2}{X^2+4X+5} &= \frac{BX+C}{X^2+4X+5}
\end{aligned}$$

Par identification $B = 0$ et $C = 2$

$$F(X) = \frac{1}{X-3} + \frac{2}{X^2+4X+5}$$

3. Calculer I.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-5}^{0} \frac{1}{x-3}\ \mathrm{d}x + 2\int_{-5}^{0} \frac{1}{x^2+4x+5}\ \mathrm{d}x \\
&= [\ln(|x-3|)]_{-5}^{0} + 2\int_{-5}^{0} \frac{1}{(x+2)^2+1}\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On pose $J = 2\int_{-5}^{0} \frac{1}{(x+2)^2+1}\ \mathrm{d}x$ puis le changement de variable :

$$\begin{cases} u = x+2 \\ \mathrm{d}u = 1\mathrm{d}x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
J &= 2\int_{-3}^{2} \frac{1}{u^2+1}\ \mathrm{d}u \\
&= 2[\arctan(u)]_{-3}^{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2(\arctan(2) - \arctan(-3)) \\
&= \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2(\arctan(2) + \arctan(3)) \\
&= \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2(\arctan\left(\frac{2+3}{1-6}\right) + \pi) \\
&= \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2(\arctan(-1) + \pi) \\
&= \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2(-\arctan(1) + \pi) \\
&= \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) \\
&= \ln\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$