

7.2

On définit la suite

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n^2} = f(u_n) \\ u_0 > 2 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

où $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$. On veut montrer que la suite converge.

On observe que si $x \geq 2$ alors $f(x) \geq 2$: donc

$$f([2, +\infty[) \subset [2, +\infty[$$

et la suite est bien définie ($u_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

On calcule f' : $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, donc

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \in [2, +\infty[\quad (*)$$

On cherche $l \in [2, +\infty[$ tel que $f(l) = l$
(cela sera utile pour appliquer le T.A.F.)

$$l = 2 + \frac{1}{l^2} \Leftrightarrow l^3 - 2l^2 - 1 = 0$$

On définit $\phi(l) := l^3 - 2l^2 - 1$ et on cherche $\bar{l} \in [2, +\infty[$ t.q. $\phi(\bar{l}) = 0$.

On observe que :

$$1) \quad \phi'(l) = 3l^2 - 4l = l(3l - 4) > 0 \quad \forall l \geq 2,$$

donc ϕ est monotone (strictement croissante)

$$2) \quad \phi(2) = -1$$

$$3) \quad \phi(3) = 8 > 0$$

Grâce à 1), 2), 3), on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et dire :

$$\exists! \bar{\ell} \in]2, \infty[\text{ t. q. } f(\bar{\ell}) = \bar{\ell}$$

En particulier, $\bar{\ell} \in]2, 3]$

Ainsi, grâce au T.A.F.,

$$|u_{m+1} - \bar{\ell}| = |f(u_m) - f(\bar{\ell})| = |f'(c)| \cdot |u_m - \bar{\ell}|$$

pour $c \in]2, \infty[$

Grâce à (*), on a :

$$|u_{m+1} - \bar{\ell}| \leq \frac{1}{4} |u_m - \bar{\ell}|$$

et via une récurrence facile :

$$|u_{m+1} - \bar{\ell}| \leq \frac{1}{4^{m+1}} |u_0 - \bar{\ell}|$$

Donc

$$u_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \bar{\ell}$$