III 5 Intégration des fractions rationelles de sinus et cosinus

28/03
Aricey
ANALYSE 2

$$\boxed{I = \int_a^b F(\sin x, \cos x)\, dx}$$ où $F(X,Y) = \frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[X,Y]$ ← des polynômes en deux variables.

But: réduire ↑ aux intégrals sur des fractions rationelles $J = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \tilde{F}(x)\, dx$ et $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathbb{R}[X]$

Rq: Ce n'est pas tjs la meilleure méthode pour résoudre I, mais ça marche tjs.

CdV ("de Weierstrass", mais utilisé avant par EULER): $\boxed{u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$du = \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' dx = \left(1 + \underbrace{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{u^2}\right) \cdot \frac{1}{2}\, dx \iff \boxed{dx = \frac{2}{1+u^2}\, du}$$

$\tan'(x) = \underset{\text{souvent meilleure}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \underset{\text{ici préférable}}{1 + \tan^2 x}$

$$\cos(x) = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \underbrace{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}} - 1 \longrightarrow \cos - \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\boxed{\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

$$\sin(x) = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}_{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \underbrace{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\boxed{\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}}$$

Rappel:

$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Pythagorean Identity → $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

par ♥!

$$\Longrightarrow \boxed{I = \int_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{b}{2}\right)} \underbrace{F\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \cdot \frac{2}{1+u^2}}_{\tilde{F}(u)}\, du}$$ ✓ But accompli

Exple: $I = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\sin x}\, dx$

- Méthode 1 (sans Weierstrass - plus rapide, mais plus diff. à trouver).

$$\boxed{I = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\sin x}\, dx} * \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\frac{1-\sin x}{1-\sin x}} \iff I = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$$

CdV: $u = \cos x$, $du = \cos'(x)\, dx \equiv$
$\equiv -\sin x\, dx$

$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \Big[\tan(x)\Big]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \frac{\cos'(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{u^2}\, du = \boxed{2 - \sqrt{2}}$$

$= \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{1/\sqrt{2}}$

- Méthode 2 (plus o moins une routine!)

$$\boxed{I = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\sin x}\, dx} = \int_0^{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} \frac{1}{1 + \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du = 2\int_0^{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} \frac{1}{(u+1)^2}\, du = 2\left[-\frac{1}{u+1}\right]_0^{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \boxed{2 - 2\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)+1}}$$

$\pi/4 \to \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $0 \to 0$, $\sin x \to \frac{2u}{1+u^2}$, $dx \to \frac{2}{1+u^2}\, du$

↓ simplification en élém.ts simples.

$$\frac{2}{u^2+2u+1}$$

Lemme: $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

$$2 - 2 \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{2} \cancel{-1+1}}_{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{2 - \sqrt{2}}$$ ✓ comme avant

Preuve: (du Lemme)

$\tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

mais à l'autre côté:

$\tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

$\lambda := \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0 \quad (i)$

$1 = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}$

$1 - \lambda^2 = 2\lambda \iff \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \overset{(i)}{\Longrightarrow} \lambda = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1 + \sqrt{2}$ □

IV.2 Équations différentielles linéaires de premier ordre $\boxed{y'+a\cdot y=b}$, $a,b\in C^0(I)$

IV 2.1 Problème Homogène $(y'+a\cdot y=0)$ $(*)$ (Pour l'étape ①)

Thrm: Toutes les solutions de $(*)$ sont de la forme $\boxed{y(x)=C\cdot\exp(-A(x))}$ $(\square)$
pour une primitive A de a et $C\in\mathbb{R}$ constante d'intégration.

Rq: 1) Soit $\tilde{A}$ une autre primitive de a.
Alors $A(x)=\tilde{A}(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$
et donc $y=C\cdot\exp(-A(x))=C\cdot\exp(-\tilde{A}(x)-c)=$
$=\underbrace{C\cdot e^{-c}}_{=:\tilde{C}\in\mathbb{R}}\exp(-\tilde{A}(x))\Rightarrow$ forme de $(\square)$ inchangée.

2) Souvent la fcn. "exp" va disparaître ds la solution $(\square)$ en simplifiant et en utilisant que $\exp\circ\ln=\mathrm{id}$.

Exple: $\boxed{xy'+2y=0}$
$\rightsquigarrow a(x)=\underbrace{\frac{2}{x}}$, $A(x)=2\cdot(\ln|x|)=\ln(x^2)$ $\Big\}$ $\boxed{y=C\cdot\exp(-\ln(x^2))=\frac{C}{x^2}}$
pour $I\subset\mathbb{R}_+^*$ ou $I\subset\mathbb{R}_-^*$

vérification: $x\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)'+2\,\frac{1}{x^2}=-2\cdot x\cdot\frac{1}{x^3}+2\cdot\frac{1}{x^2}=0$ ✓

IV.2.2 Des solutions particulières (pour l'étape ②)

Rq: Si $a(x)=a=\text{cste.}$ ds $(*)$, souvent il y a des autres méthodes pr trouver une sol. part.
Exple: $y'+3y=x\cdot e^x$ (cf. $y'=xe^x\Longleftrightarrow y(x)=\int x\cdot e^x dx$ soit I.P.P soit $y(x)=(C_1x+C_2)\cdot e^x$).
Essayons $y(x)=(C_1\cdot x+C_2)\cdot e^x$, $y'=(C_1\cdot x+C_1+C_2)\cdot e^x$
$\Longrightarrow y'+3y=(4C_1x+C_1+4C_2)\cdot e^x\overset{!}{=}x\cdot e^x \Longleftrightarrow 4C_1\cdot x+\underbrace{C_1+4C_2}_{\overset{!}{=}0}\overset{!}{=}x\Longrightarrow\begin{cases}C_1=1/4\\ C_2=-1/16\end{cases}$
$y_{part}(x)=\frac{1}{16}(4x-1)e^x$

Il faut trouver une seule solution du pb. donné, càd donc $\boxed{y'+a(x)\cdot y=b(x)}$ $(*)$

Méthode 1 (plus simple, mais exceptionelle): deviner une solution.
Méthode 2 (méthode générale, fonctionne tjs): la variation de la constante, $y_{hom}(x)=C\cdot\tilde{y}(x)$ ($C\in\mathbb{R}$) $\rightsquigarrow$ $\boxed{y(x)=C(x)\ \tilde{y}(x)}$

Commençons avec un exemple:
$\boxed{x\cdot y'+2y=4}$ $(\triangle)$ ici méthode 1 marche facilement, on voit $\boxed{y_{part}(x)=2}$

Comment trouve-t-on ceci avec méthode 2? $\rightarrow y_{hom}(x)=\frac{C}{x^2}$ $\left(\tilde{y}(x)=\frac{1}{x^2}\right)$ $\rightsquigarrow y(x)=C(x)\cdot\frac{1}{x^2}$

$y'(x)=C'(x)\cdot\frac{1}{x^2}-2\cdot C(x)\cdot\frac{1}{x^3}$

$(\triangle)\Longrightarrow x\cdot\left(\frac{C'(x)}{x^2}-\cancel{\frac{2C(x)}{x^3}}\right)+\cancel{\frac{2C(x)}{x^2}}\overset{!}{=}4\Longleftrightarrow$ ⚠

Simplification: $\frac{C'(x)}{x}$; s'annule!! – c.f. ci-dessous!

$\Longleftrightarrow C'(x)=4x\Longleftarrow C(x)=2x^2$ ⚠ pas y_{part}!
$\Longrightarrow y_{part}(x)=2x^2\cdot\frac{1}{x^2}=2$ $\square$.

La méthode de la variation de la constante:
Soit $\tilde{y}(x)$ une solution du pb hom $y'+a(x)\cdot y=0$,
alors $y_{hom}(x)=C\cdot\tilde{y}(x)$, $C\in\mathbb{R}$, la solution gén. du pb. hom.
On regarde $\boxed{y(x)=C(x)\cdot\tilde{y}(x)}$ (a) ds l'eq. $(*)$.

$y'(x)=C'(x)\cdot\tilde{y}(x)+C(x)\cdot\tilde{y}'(x)$
alors $(*)$ avec (a) donne
$C'(x)\cdot\tilde{y}(x)+C(x)\cdot\tilde{y}'(x)+a(x)\cdot C(x)\cdot\tilde{y}(x)\overset{!}{=}bx\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow C'(x)\cdot\tilde{y}(x)+C(x)\underbrace{\left[\tilde{y}'(x)+a(x)\cdot\tilde{y}(x)\right]}_{0\text{ (par construction!)}}=b(x)\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow C'(x)\cdot\tilde{y}(x)=b(x)$
alors, on trouve. $C'(x)=\frac{b(x)}{\tilde{y}(x)}$ ← une intégration habit. pour $C(x)$
— on le connaît.

Rq: À retenir
⚠ $\left.\begin{array}{l}y'+a(x)\cdot y=b(x)\\ y(x)=C(x)\cdot\tilde{y}(x)\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\boxed{C'(x)\cdot\tilde{y}(x)=b(x)}$

IV.2.3. La Solution générale

$y(x) \equiv y_{gen}(x) = y_{part}(x) + y_{hom}(x)$

elle contient une cste.

$y_{hom}(x) = C \cdot \tilde{y} \quad C \in \mathbb{R}$

$\left(y_{part}(x) + C \cdot \tilde{y}(y_0) \overset{!}{=} y_0\right)$

Si l'on a des conditions initiales,

$y(x_0) \overset{!}{=} y_0$ → ça permet de fixer C.

données

IV.3 Des éq's diff. lin. de deuxième ordre à coeff. const.

$\boxed{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = b(x)}$, $p, q \in \mathbb{R}$ (*)

IV.3.1. Pb. Hom.

$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \xrightarrow{(\square)}$ réduire à $\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$

$(\square)$ $y(x) = e^{\lambda \cdot x}$ ou, pour le moment, $\lambda \in \mathbb{C}$!

- cas 1 : $\Delta > 0$ 2 racines $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

  $\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$

- cas 2 : $\Delta = 0$ une seule λ. $\lambda_1 = \lambda_2$

  $\boxed{y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{\lambda \cdot x}}$

- cas 3 : $\Delta < 0$, $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - ib$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

  $\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^{a x} \cdot \cos(bx) + C_2 \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx)}$

  $y_\pm(x) = e^{ax \pm ibx} = e^{ax}\left[\cos(bx) \pm i \sin(bx)\right]$

  Rq.

  $\mathrm{Re}\left(y_{+(-)}(x)\right) = e^{ax} \cdot \cos(bx) = \dfrac{y_+(x) + y_-(x)}{2}$

  $\mathrm{Im}\left(y_{+(-)}(x)\right) = {+(-)}\, e^{ax} \cdot \sin(bx) = {+(-)}\, \dfrac{y_+(x) - y_-(x)}{2i}$

Exples.

1) $y'' - 2y' + y = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = 1 \pm 0 = \pm 1$ $(\Delta = 0)$

   $\Rightarrow y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^x$

2) $y'' + 3y' + 2y = 0 \rightarrow y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x}$

3) $y'' - 6y + 11y = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \pm i\sqrt{2} \rightarrow y(x) = C_1 \cdot e^{3x} \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \cdot e^{3x} \sin(\sqrt{2}x)$