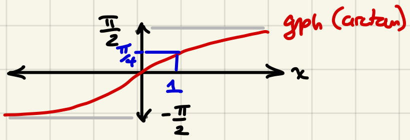
21/03/23
Fricey
ANALYSE 2

Pour simplifier $\underset{(+)}{\arctan(b)} - \underset{(-)}{\arctan(a)}$ $\left(= \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \right)$:



Lemme: $\arctan(a) + \arctan(b) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) & \text{si } a\cdot b < 1 \quad i) \\ \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \operatorname{sgn}(a)\pi, & \text{si } a\cdot b > 1 \quad ii) \\ \operatorname{sgn}(a)\cdot\frac{\pi}{2} & \text{si } a\cdot b = 1 \quad iii) \end{cases}$

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} +1 & \text{si } a>0 \\ -1 & \text{si } a<0 \end{cases}$$

Preuve:

- On commence par cas iii):

$\underset{\text{supposons } a>0}{a\cdot b = 1} \Rightarrow b = \frac{1}{a}$

$f(x) := \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{-\frac{1}{x^2+1}} = 0$

alors on trouve: pour $x>0$ ou $x<0$.

$f(x) = C \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = c \\ \text{mais } \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} c = \frac{\pi}{2}$

alors pour $a>0$:

$\arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$

si $a<0$:

$\arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = -\underbrace{\left(\arctan\left(\frac{1}{a}\right) + \arctan\left(\frac{1}{|a|}\right)\right)}_{\pi/2}$ $\square$

(pour cas iii)

- **Rappel:**

1) $\boxed{\tan(\alpha+\beta)} \overset{\text{Déf}}{=} \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)} = \boxed{\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}}$ $(*)$

(pour α, β bien définie)

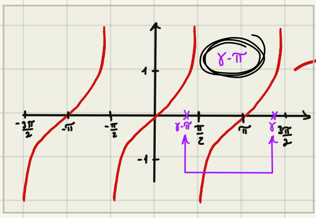
2) $\tan \circ \arctan = \mathrm{id} \Longleftrightarrow \tan(\arctan(\gamma)) = \gamma$

mais $\arctan \circ \tan \neq \mathrm{id}$

seulement $\arctan \circ \tan\big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} = \mathrm{id}$

plus généralement on a:

$\arctan(\tan(\gamma)) = \gamma - k\pi$ si $\gamma \in \left]\frac{\pi}{2}, 0\right[\subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



$\rightarrow \tan(\gamma) = \tan(\gamma - k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$

- $(*)$ pour $\alpha = \tan a$, $\beta = \tan b$:

$\tan(\underbrace{\arctan(a) + \arctan(b)}_{=:\gamma}) = \frac{\tan(\arctan(a)) + \tan(\arctan(b))}{1 - \tan(\arctan(a)) * \tan(\arctan(b))} = \tan(\arctan(a) + \arctan(b)) = \frac{a+b}{1-a\cdot b}$ $(**)$

On applique arctan à l'équation $(**)$, $\Rightarrow \arctan(\tan(\gamma)) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-a\cdot b}\right)$

avec $\gamma \equiv \arctan(a) + \arctan(b)$. Si on sait que $\gamma \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ l\cdot\pi$,

alors ceci donne déjà $\arctan(a) + \arctan(b) - l\cdot\pi = \arctan\left(\frac{a+b}{1-a\cdot b}\right)$.

Alors il reste déterminer l pour tous les cas où $a\cdot b \neq 1$.

On garde le graphe d'arctan ci-dessus.

- Soit $a \geq 0$ et $b \leq 0$ (ou $a \leq 0$ et $b \geq 0$) $\Rightarrow a \cdot b < 1$

  ($\arctan(a) \in [0, \frac{\pi}{2}[$ $\arctan(b) \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$)

$\Rightarrow \arctan(a) + \arctan(b) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\ell = 0$ ✓

- Il reste $\underset{(1)}{\underline{a>0 \text{ et } b>0}}$ et $\underset{(2)}{\underline{a<0 \text{ et } b<0}}$

Supposons (1) : $b := \frac{1}{a} + \hat{b}$

alors $\arctan(a) + \arctan(b) \equiv$

$$\equiv \arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a} + \hat{b}\right) \underset{(<)}{>} \arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

si $\hat{b} \underset{(<)}{>} 0 \iff a \cdot b \underset{(>)}{>} 1$

alors pour $a \cdot b > 1$ (et encore $a > 0$).

$\gamma \equiv \arctan(a) + \arctan(b) > \frac{\pi}{2}$

mais aussi $\gamma < \pi < \frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow \ell = +1$; ce qui montre (ii) pour $a > 0$.

($\arctan x < \frac{\pi}{2}$)

et pour $a \cdot b < 1$:

$0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \ell = 0$; ce qui montre (i) pour $a > 0$ et $b > 0$

car $a>0$ et $b>0$

(2) : $\underline{a<0 \text{ et } b<0}$:

$\Rightarrow \arctan(a) + \arctan(b) = \arctan(-|a|) + \arctan(-|b|) =$

$$= -(\arctan(|a|) + \arctan(|b|)) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{|a|+|b|}{1-|a|\cdot|b|}\right) & \text{si } |a|\cdot|b| < 1. \\ \arctan\left(\dfrac{|a|+|b|}{1-|a|\cdot|b|}\right) + \pi & \text{si } |a|\cdot|b| > 1. \end{cases}$$

mais $|a|\cdot|b| = a \cdot b$; et $\arctan\left(\dfrac{|a|+|b|}{1-|a|\cdot|b|}\right) = -\arctan\left(\dfrac{a+b}{1-a\cdot b}\right)$

dans ce cas qui montre (i) et (ii) pour a et b négatif. $\square$.

Rq : On peut faire une preuve pour (i) et (ii) similaire à la preuve ci-dessus pour (iii).
Mais ici on va continuer dans une autre façon.

(PAS NÉCESSAIRE $\Rightarrow$ Extra) / Preuve alternative pour i) et ii)

cas $a \cdot b \neq 1$:

$f(x) := \arctan(a) + \arctan(x) - \arctan\left(\dfrac{a+x}{1-ax}\right)$

0 $1/1+x^2$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} \cdot \frac{1(1-a\cancel{x}) - (a+\cancel{x})(-a)}{(1-ax)^2}}$$

$*$

$$\frac{1}{(1-ax)^2 + (a+x)^2} \cdot (1+a^2)$$

denom.

$$(1-ax)^2 + (a+x)^2 = 1 - \cancel{2a}x + a^2x^2 + a^2 + \cancel{2a}x + x^2 =$$
$$= (1+x^2)(1+a^2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-a^2}{(1-x^2)(1+a^2)} = 0$$

$f(x) = c$ (si $a \cdot x \neq 1$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \arctan(a) + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(-\frac{1}{a}\right) =$$
$$= \underbrace{\arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right)}_{\operatorname{sgn}(a) \cdot \frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \arctan(a) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(-\frac{1}{a}\right)$$
$$= \underbrace{\arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right)}_{\operatorname{sgn}(a) \cdot \frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow c = (\operatorname{sgn}(a) \pm 1) \cdot \frac{\pi}{2}$

$x > \frac{1}{a}$

$\Rightarrow \arctan(a) + \arctan(x) = \arctan\left(\dfrac{a+x}{1-ax}\right) + (\operatorname{sgn}(a) \pm 1) \cdot \frac{\pi}{2}$

$x < -\frac{1}{a}$

alors si, $a \cdot x > 1$ et $x > 0$:

$$\arctan(a) + \arctan(x) = \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) + 2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

si, $a \cdot x > 1$ et $x < 0$ ($\Rightarrow a < 0$).

$f(x) = \arctan(a) + \arctan(x) - \arctan\left(\dfrac{a+x}{1-ax}\right)$ si $a \cdot x \neq 1$

$f(x) = c$ ds un intervalle (attention f dépend de a)

cas 1 : $\underline{a \cdot x > 1}$
- $a < 0$ ($\Rightarrow x < 0$) $\rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty}$ $c = -\pi$
- $a > 0$ ($\Leftarrow x > 0$) $\rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty}$ $c = +\pi$

cas 2 : $a \cdot x < 1$
- $\operatorname{sgn}(a) \neq \operatorname{sgn}(b)$ $\rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty}$ $c = 0$
- $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(x)$ $\rightarrow \lim\limits_{x \to 0}$

pour calculer c

$\Rightarrow c = (\operatorname{sgn}(a) + \operatorname{sgn}(x)) \cdot \frac{\pi}{2}$

si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \arctan a + 0 - \arctan(a) = 0$

alors pour $a \cdot x < 1$ et $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(x)$: $c = 0$ $\square$.

IV. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES

IV.1 Introduction

Problèmes non homogènes – des Solutions Particulières et Générales

On va se restreindre aux eq diff. *linéaires* (ordinales- partielles) de
(1) d'ordre 1.
(2) d'ordre 2 à coéfficients constants.

3 étapes pour les résoudre
- ① sol. gén. du pb. hom. associée.
- ② une sol. particulière.
- ③ sol gén et éventuellement les conditions initiales.

Notation: $y \in C^n(I)$, I intervalle ouverte $\subseteq \mathbb{R}$, l'argument de y est appelé x (alors $y(x)$).

$$y^{(k)} := \underbrace{\frac{d}{dx} \cdot \ldots \cdot \frac{d}{dx}}_{k \text{ fois}} \cdot y$$

on parle des dérivées!

n est l'ordre de l'eq. diff!

n-1 dérivée — 1ère dérivée — sans dérivé

But. On cherche $y \in C^n(I)$ t.q. $\boxed{y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b}$ (*) donné $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^*, \ a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in C^0(I) \\ \text{et } x_0 \in I, \ y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R} \end{cases}$

Éventuellem^t on pose des conditions supplémentaires.
(appelés conditions initiales):

$$\boxed{y(x_0) \stackrel{!}{=} y_0, \ y'(x_0) \stackrel{!}{=} y_1, \ldots \ y^{(n-1)}(x_0) \stackrel{!}{=} y_{n-1}} \quad (**)$$

> **Rq:** Une eq. diff (*) avec $b=0$ (fonct. zéro) est appelé **homogène**.

Méthode: 3 étapes
1. Trouver toutes les solutions de (*) pour $b=0$ (pb. homogène associée) (on remplace b par 0 !)
   - On appelle ces solutions y_{hom}.
2. Trouver *une* solution de (*), appelé y_{part}.
3. Solution générale $y = y_{hom} + y_{part}$, et implémenter (**) si demandée.

Preuve: ce jendi 23/03 en Algèbre.

(1) $\boxed{y' + a\,y = b}$ (*) avec $a, b \in C^0(I)$ (2) $\boxed{y'' + py' + q = b}$ avec $p, q \in \mathbb{R}$ (constants!) et $b = $ "$b(x)$" assez simple.

$\boxed{y(x_0) = y_0}$ (**) $\boxed{y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1}$ (**)

Exples.

(1) $y' + 3y = e^x$, $y(0) \stackrel{!}{=} 1$

① pb. hom. ass. : $y' + 3y = 0 \iff y' = -3y \iff y(x) = C \cdot e^{-3x}$ (cf. plus tard) $y_{hom} = C \cdot e^{-3x}$

② $y_{part}(x) = \frac{1}{4} e^x$ (deviné)

$\underbrace{\frac{1}{4} e^x + \frac{3}{4} e^x}_{\frac{4}{4} e^x} = e^x$

③ $\boxed{y = C \cdot e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x}$ la solut° générale → $y(0) = C + \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} 1$ $\Rightarrow C = \frac{3}{4}$ → la solution: $\boxed{y(x) = \frac{3}{4} e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x}$

(pour x=1 $C \cdot (1) + \frac{1}{4}(1)$)

(2) $y'' + 4y = e^x$, $y(0) \overset{!}{=} 0$, $y'(0) = \frac{11}{5}$ → 2 conditᵒ initiales!

① Ex. algèbre I.9

$\Rightarrow y_{hom}(x) = A\cdot\sin(2x) + B\cdot\cos(2x)$ (avec $A, B \in \mathbb{R}$)

② $y_{part} = \frac{1}{5}\exp$

③ Sol gén. $\boxed{y(x) = A\cdot\sin(2x) + B\cdot\cos(2x) + \frac{1}{5}e^x}$ (□)

$y(0) \overset{(□)}{=} B + \frac{1}{5} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$

$y'(0) \overset{(□)}{=} 2A\cdot\underbrace{\cos(0)}_{1} + \frac{1}{5} \overset{!}{=} \frac{11}{5} \Rightarrow A = 1$

→ la solution: $\boxed{y(x) = \sin(2x) - \frac{1}{5}\cos(2x) + \frac{1}{5}e^x}$

IV.2 Équations différentielles du premier ordre

(*) $\boxed{y' + a\cdot y = b}$ avec $a, b \in C^\infty(I)$

Remarque:

Cas spéciale de (1) (*) est $\boxed{y' = f(x)}$ → intégratᵒ hab.

cf. Thm fond. d'Analyse
$y(x) = \int f(x)\,dx$ ou
$y(x) = F(x) + C$ pour une F avec $F'(x) = f(x)$

(**) $y(a) = 0$

(*) & (**): $y(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

But pour (1): réduire (*) à deux intégrations habituelles.

IV.2.1. Problème Homogène

Thm: Toutes les solutions de $y' + a(x)\cdot y = 0$ sont de la forme $\boxed{y(x) = C\cdot\exp(-A(x))}$ (Δ) pour une primitive A de a.

Preuve: que ceci donnent des solutions (que toutes: admis en ce moment)

(Δ): $y' = C\cdot\exp(-A(x))\cdot(-A'(x)) = -a(x)\underbrace{C\cdot\exp(-A(x))}_{\overset{(\Delta)}{=} y}$ alors vraiment: $y' + a\cdot y = 0$ □.

Thm → solutᵒ à (1)

IV.2.2 Problème inhomogène

pour (2): soit deriver

soit $\boxed{\text{variation de la constante}}$: remplacer la constante C ds y_{hom} par une fonctᵒ $C(x)$.

Ça donne une intégratᵒ hab. pour la fonction $C(x)$.