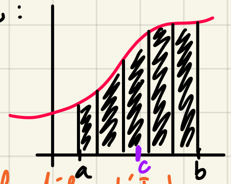
III. INTÉGRATION HABITUELLE

28/02
Gricey
ANALYSE 2

Idée :



Pour la déf. d'Intégral de Riemann

thm fond. d'analyse →

$f \in C^0([a,b])$
$\Rightarrow I(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b]$

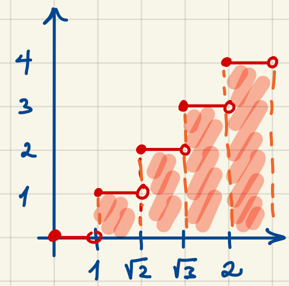
alors $I \in C^1(]a,b[)$ et $I'(x) = f(x)$

pour le calcul pratique !

Déf: Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, s'il existe une division de $[a,b]$, $a \equiv a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $f|_{]a_i, a_{i+1}[} = C_{i+1} \in \mathbb{R}$

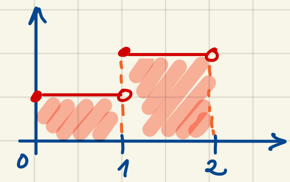
Exples.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto E(x^2)$



2) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1[\\ 5 & x = 1 \\ 2 & x =]1,2] \end{cases}$

$f : [0,2[\to \mathbb{R}$



diff. d'au moins 1.

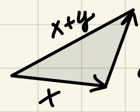
Déf: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier (comme ci-dessus),
Alors on définit :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (a_{i+1} - a_i)}$$

Déf: 1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-Intégrable (RI), si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ fcns. e, E en escalier t.q.
a) $e \leq f \leq E$
b) $\int_a^b (E(x) - e(x))\,dx < \varepsilon$
c) Soit f R.I. sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{e \leq f} \int_a^b e(x)\,dx \quad \left(= \inf_{E \geq f} \int_a^b E(x)\,dx \right)$.

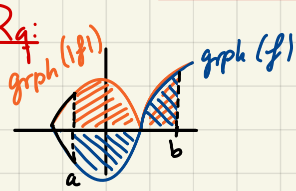
Lemme: 1) $\left.f, g : [a,b] \to \mathbb{R}\right\}$ t.q. $f(x) \leq g(x)$,
alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Rappel: l'inégalité triangulaire.
$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad |x+y| \leq |x| + |y|$



(plus généralement $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$)

Rq:



Exples. 1) $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ est R.I (cf. exercice *)

2) $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

en particulier elle n'est pas continue.

implique que 1) $e(x) \leq 0,\ \forall x \in [0,1]$
2) $E(x) \geq 1$, — " —

Alors f n'est pas RI.

Thm: (Fondamental d'Analyse):

1) Soit $f \in C^0([a,b])$ et $I(x) := \int_a^b f(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b]$
alors $I \in C^1([a,b])$ et $I'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[$.

2) Si $F \in C^1(]a,b[)$ t.q $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[$
alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Prop: 1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad \forall c \in]a,b[$.

2) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue en morceau est RI.

Exple: $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \quad \int_0^1 x\,dx \overset{\text{Thm}}{\underset{2)}{=}} F(1) - F(0) = \frac{1}{2}$ alors, p.e. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3 \ \cancel{+3-3}$, $F' = f$

Nomenclature/Notation:

1) $F(b) - F(a) = [F]_a^b \equiv [F(x)]_a^b \equiv [F(x)]_{x=a}^b$

2) Chaque fonct° F, t.q. $F' = f$ est appelé une primitive (de f).

> **Rq:** $F, G \in C^1(]a,b[)$ t.q. $F' = G'$ alors $\exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in]a,b[$

3) Notation pour l'ensemble des primitives d'une fonct° $f \in C^0([a,b])$: $\int f(x)\,dx \equiv \int f(x)\,dx + C$

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \int_c^x f(t)\,dt + C,\ c \in [a,b],\ C \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\int f(x)\,dx \sim \int_c^x f(t)\,dt \text{ pour } c \in [a,b]$$

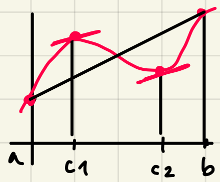
c'est une notation utile mais aussi dangereuse: $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ — toujours à ajouter avec cette notation.

$\int \sin x\,dx = \sin x + 3 + C$

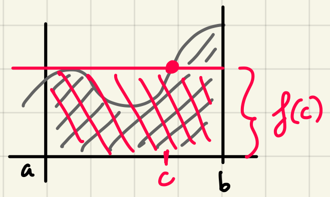
$\Rightarrow 0 = 3$ — $\tilde{C} = C - 3 \to$ mais on

$(2C = C = C + 3$ etc.$)$ note cette constante de nouveau C.

> **Rappel:** TAF $f \in C^0([a,b])$ est $\mathcal{D}^1(]a,b[)$
>
> alors $\exists c \in]a,b[$ t.q. $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$



> **Thm: de la Moyenne:**
> $f \in C^0([a,b])$, alors $\exists c \in]a,b[$ t.q. $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c)$



Preuve: Soit F une primitive de f, ($\exists$ selon le thm. fond., $F(x) = I(x)$) et aussi $F \in C^1(]a,b[) \subset \mathcal{D}^1(]a,b[)$ càd $F' = f$

fonct C^1 $\therefore$ dériv. et continue.

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, alors $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} \overset{\text{TAF}}{=} F'(c) = f(c)$ $\square$.

$\exists c$, t.q.

La Philosophie (Thm Fond.): chaque règle de dérivation il y en a une pour l'intégration.

1) $(F + \lambda G)' = F' + \lambda G' \Rightarrow \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \lambda \int_a^b g(x)\,dx$

Preuve: $\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))\,dx = \int_a^b (F'(x) + \lambda G'(x))\,dx = \int_a^b (F + \lambda G)'(x)\,dx \overset{\text{Thm}}{\underset{\text{Fond.}}{=}}$

$= [F + \lambda G]_a^b = F(b) + \lambda G(b) - F(a) - \lambda G(a) =$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \lambda \cdot \int_a^b g(x)\,dx$ $\square$.

2) $(F\cdot G)' = F'\cdot G + F\cdot G'$

Règle de Leibniz $\longrightarrow$ I.P.P.

3) $(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x))\cdot \varphi'(x) \longrightarrow$ CdV changem^t de Variable

Thrm: (intégration par parties I.P.P.)

Soit $u, v \in C^1([a,b])$ alors

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = \underbrace{\left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b}_{\text{Primitive de}} - \underbrace{\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx}$$

OU

$\forall f \in C^0([a,b])$, $g \in C^1(]a,b[) \cap C^0([a,b])$

et F une primitive de f $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \left[F\cdot g\right]_a^b - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx$

Preuve:

1) "OU" changement de notation : $u = F$, $v = g$

2) $\displaystyle\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = \int_a^b \left[(u(x)\cdot v(x))' - u(x)\,v'(x)\right] dx = \underbrace{\int_a^b (u(x)\cdot v(x))'\,dx}_{\left[u(x)\cdot v(x)\right]_{x=a}^{x=b}} - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx$ $\square$.

Rq: Méthode pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$, consiste de

1) $f(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)$ (et ensuite $f_1(x) = u'(x)$ ou $u(x)$
$f_2(x) = v(x)$ ou $v(x)$)

2) On connait une primitive d'une de deux fcns. p.e. $F_1(x)$ t.q. $F_1' = f_1$ ($\longleftrightarrow F_1(x) = u(x)$)

le But! 3) $\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx$ est soit plus simple que $\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx \equiv \int_a^b f(x)\,dx$.

Exples. 1) $\int 1\cdot \ln(x)\,dx$

$u'(x) = 1$ $v(x) = \ln(x)$

i) $u(x) = x$ $v'(x) = \frac{1}{x}$ ii)

$\overset{I.P.P.}{=} \displaystyle\int x\cdot \ln x - \underbrace{\int x\cdot\frac{1}{x}}_{\text{Plus simple!}} = x\cdot\ln(x) - x + C \equiv x(\ln(x) - 1) + C$

petit "c", une cste spécifique

Application

$$\int_2^3 \ln(x)\,dx = \left[x\ln(x) - x + c\right]_2^3 = (3\ln(3) + \cancel{c} - (2\ln(2) - 2 + \cancel{c}))$$

$= \ln(27) - 1 - \ln(4)$

$= \boxed{\ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1}$

2) $I_n := \int_0^1 x^n \cdot e^x \, dx$

si on veux la diagonal ds l'autre sens, changer *

$u(x) = x^n \qquad v'(x) = e^x$

$u'(x) = n \cdot x^{n-1} \qquad v(x) = e^x$

$= \left[x^n \cdot e^x\right]_0^1 - \int n \cdot x^{n-1} \cdot e^x \, dx = e - n \cdot I_{n-1}$

alors on a une <u>récurrence</u>

$I_n = e - n \cdot I_{n-1}$

$I_0 = \int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$

p.ex. pour $I_2 = e - 2 \underbrace{I_1}_{e - I_0} = -e + 2 I_0 = -e + 2(e-1) = \underline{\underline{e-2}}$