II.5 Des Suites Récurrentes

21/02/23
ANALYSE 2

$f : D \to \mathbb{R}$ $\quad I \subset D$ t.q. $\underbrace{f(I) \subset I}_{\square}$ (l'intervalle I stable par rapport à f).

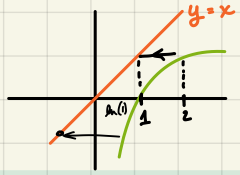
$$(*)\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Non-Exemple : $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ et. p.ex. $u_0 = 2$, $u_1 = \ln(2) < 1$

$u_2 = \ln(\ln(2)) < 0$

u_3 n'est pas définie.

$\nexists\, I$ t.q. $(\square)$



Prop:

1) Si f croissante sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(*)$ est monotone $\left\{\begin{array}{l} \text{croissante} \Longleftrightarrow u_1 \geq u_0 \\ \text{décroissante} \Longleftrightarrow u_1 \leq u_0 \end{array}\right)$.

(et une version où f est croissante).

2) Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $V_n = u_{2n}$

$W_n = u_{2n+1}$

Preuve:

1) $f \nearrow$ soit $u_1 \geq u_0 \Longrightarrow \underbrace{f(u_1)}_{u_2} \underset{\geq}{\geq} \underbrace{f(u_0)}_{u_1} \xRightarrow[\text{Récurrence}]{\text{Par}} u_{n+1} \geq u_n \ \forall n \in \mathbb{N}.$

(similaire si $u_1 \leq u_0$)

2) $F = f \circ f$ croissante et $\underbrace{V_{n+1}}_{u_{2n+2}} = F\underbrace{(V_n)}_{\underbrace{f(f(u_{2n}))}_{u_{2n+1}}}$, $W_{n+1} = F(W_n) \Longrightarrow (V_n), (W_n)$ monotone (par 1).

Supposons que $V_1 \geq V_0$ $\quad (\Longleftrightarrow V_n \nearrow)$

$\Updownarrow$

$\underbrace{f(u_2)}_{u_3} \leq \underbrace{f(u_0)}_{u_1} \underset{f \searrow}{\Longleftarrow} u_2 \geq u_0$

$W_0 = u_1$, $W_1 = u_3$ alors

$u_3 \leq u_1 \Longleftrightarrow W_1 \leq W_0$ alors $W_n \searrow$ $\quad \square$.

Déf: $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x \in D_f$ t.q. $f(x) = x$

Alors x est un $\underset{(PF)}{\underline{\text{point fixe}}}$ de f.

Rappel: Si f est continue sur I et $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ alors l est PF de f.

$\left(\text{car } u_{n+1} = f(u_n) \quad u_{n+1} \downarrow l, \quad f(u_n) \xrightarrow{\text{cont. de } f} f(l) \right).$

• La rapidité de la convergence d'une suite.

Déf: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{E}_n := |u_n - l|$

et supposons que $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{E}_{n+1}}{\mathcal{E}_n} = K \in \mathbb{R}_+$. $\quad K$ ... coefficient de la convergence.

si $K = 1$
si $0 < K < 1$
si $K = 0$

$\Big\}$ Convergence $<$ lente / géométrique / rapide

Exples: trois suites u_n avec $\ell=0$.

1) $u_n = \frac{1}{n}$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$

$((u_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ $\quad \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

convergence lente (aussi pour $u_n = \frac{1}{n^k}$, $k\in\mathbb{N}^*$)

2) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$, $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} = K$

convergence géométrique

3) $u_n = \frac{1}{n!}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n}$. $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = 0$

convergence rapide

Déf: $f: I \to \mathbb{R}$ contractante.
ssi $\exists k \in]0,1[$ t.q. $\forall (x,y)\in I^2 : |f(x)-f(y)| \le k|x-y|$

k doit être str <1 !

Rq: f contractante $\Longrightarrow |f(x)-f(y)| < |x-y| \quad \forall (x,y)\in I^2$

$\not\Longleftarrow$!

Lemme: $f: I\to\mathbb{R}$ dérivable t.q. $\sup_{x\in I} |f'(x)| = k < 1$, alors f est contractante.

Preuve: $(x,y)\in I^2$ $\quad f|_{[x,y]}$ cont. $\quad f|_{]x,y[}$ dériv.

TAF $\Rightarrow |f(x)-f(y)| = |f'(c)||x-y| \le k|x-y|$. $\square$

$\hookrightarrow c\in]x,y[$

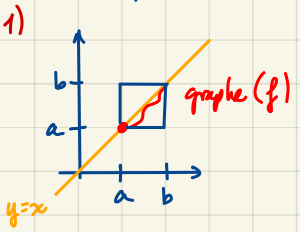
Thm: du point fixe: I intervalle fermé $I=[a,b]$ ou $I=[a,\infty[$, ...)

intervalle compacte.

$\boxed{f: I\to I \text{ contractante et continue}} \Longrightarrow$
1) $\exists!$ PF $\ell\in I$,
2) $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$
3) convergence géométrique

Preuve: (pour $I=[a,b]$)

1)



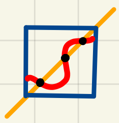
$\exists$ P.F par Thm des Valeurs Intermédiaires (TVI) par $g(x) = f(x) - x$

$(g(a) = f(a) - a \ge 0,\ g(b) = f(b) - b \le 0 \quad \exists c: \ g(c) = 0 \iff f(c) = c \quad \square.)$

• Unicité du P.F. $\ell_1\, \ell_2$ PF's
$\ell_1 \ne \ell_2$

$|\ell_1-\ell_2| = |f(\ell_1)-f(\ell_2)| \le k\,|\ell_1-\ell_2| < |\ell_1-\ell_2|$ ↯ alors $\ell_1=\ell_2$

Rq: $f: I\to I$ continue quelconque $\Longrightarrow \exists$ des pts. fixes (preuve comme ci-dessous)



ici 3 P.F. (f n'est contractante).

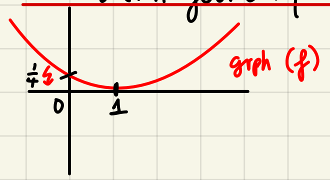
2) $\underbrace{|u_{n+1}-\ell|}_{\varepsilon_{n+1}} = |f(u_n)-f(\ell)| \le k\,\underbrace{|u_n-\ell|}_{\varepsilon_n} \xRightarrow{\text{récurrence}} |u_n-\ell| \le k^n \cdot |u_0-\ell| \xrightarrow[\text{car } k<1]{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n=\ell$

3) $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \le k$, avec $k \in]0,1[$ ⟶ convergence géométrique.

II.5.2. Des Exemples / SolEx

1) $f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2$

Motivation géométrique



$u_0 \in I = [0,1]$

$(\mathrm{im}\, f|_I)$: $f'(x)=\frac{1}{2}(x-1) \le 0$ sur I

$f \searrow$, $f(0)=\frac{1}{4}$, $f(1)=0 \Rightarrow \mathrm{im}(f|_I)=[0,\frac{1}{4}] \subset I$.

alors I stable pour f.

Est-ce que f est contractante sur I? $|f'(x)| \le \frac{1}{2} = k$ $\forall x \in [0,1]$

↳ F contractante sur I !

il y a 1 seul PF.

en appliquant le thm du PF!

Thm du Point Fixe

$\Rightarrow \exists\, \ell \in I$, P.F et $\lim_{n\to\infty} u_n=\ell$.

• Il reste à calculer ℓ: $f(\ell) \iff \frac{1}{4}(\ell-1)^2=\frac{1}{4}(\ell^2-2\ell+1)=\ell$

$\ell^2-6\ell+1=0$ $\ell_{1,2}=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm\sqrt{8}$

$\ell \in [0,1]=I$ alors $\ell=3-\sqrt{8}$

et $\boxed{\lim_{n\to} u_n = 3-\sqrt{8}}$ ⟶ (2) du Thm P.F.

TAF $= f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)$ $(x,y \in I^2)$
↳ $c \in]x,y[$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \frac{1}{2}|x-y|$ $\forall (x,y) \in I^2$

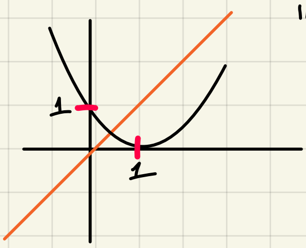
2) $f(x)=(x-1)^2$ $\frac{1}{2}=u_0 \in I\ [0,1]$

~~$\Rightarrow |f'(x)| \le k \in]0,1[$ $\forall x \in [0,1]$~~
f n'est pas

$\mathrm{im}(f|_I)$: $\underbrace{f'(x)}=2(x-1) \le 0$ sur I

$|f'(x)| \le 2$ ∴ → On peut pas appliquer le Thm du P.F
↳ f n'est pas contractante.

f' borné par 2, $2>1$



⚠ On a besoin d'une $k \in]0,1[$ strictement !

~~Thm du P.F~~

$f \searrow$ sur $I \underset{\text{Prop.}}{\Longrightarrow}$ (V_n), (W_n) sont monotones (de sens opposés)

$V_0=u_0=\frac{1}{2}$, $u_1=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

$V_1=u_2=f(u_1)=f(\frac{1}{4})=\frac{9}{16}$

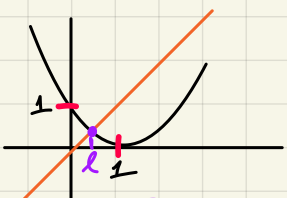
$V_n=u_{2n}$, $W_n=u_{2n+1}$

$V_0=\frac{1}{2} < V_1=\frac{9}{16} \Rightarrow V_n \nearrow$

$\underset{\text{(Prop)}}{\Longrightarrow} W_n \searrow$

$V_n \nearrow$, $V_n \le 1$ (Majorée) $\Rightarrow \exists\, \ell_1 : \lim_{n\to\infty} V_n=\ell_1$

$W_n \searrow$, $W_n \ge 0$ (minorée) $\Rightarrow \exists\, \ell_2 : \lim_{n\to\infty} W_n=\ell_2$



$\exists\, \ell \in [0,1]$ P.F.

mais $\ell_1 \ne \ell_2$ et alors (u_n) ne converge pas!

$V_n \nearrow$, $V_0=\frac{1}{2}$, $V_n \le 1 \Rightarrow \ell_1 \in [\frac{1}{2},1]$

$W_n \searrow$, $W_0=u_1=\frac{1}{4}$, $W_n \ge 0 \Rightarrow \ell_2 \in [0,\frac{1}{4}]$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \ell_1 \ne \ell_2$!

(Ex. à vous: u_4. $\ell_1=1$, $\ell_2=0$)

cf. cours

3) := Fiche 3, $\boxed{\text{ex. 6}}$

$f(x) = \frac{3-x^2}{2}$, $u_0 = \frac{1}{2}$ $\quad \tilde{I} = [0, \infty[\equiv \mathbb{R}_+$, $I = [0, \sqrt{3}]$

6.1 a) $f'(x) = -x \leq 0$ pour $x \in \tilde{I}$ alors $f \searrow$

6.1 b) $f|_I \searrow$, $f(0) = \frac{3}{2} < \sqrt{3}$, $f(\sqrt{3}) = 0$ $\quad f(I) = [0, \frac{3}{2}] \subset [0, \sqrt{3}]$ ✓

$\left(\begin{array}{l} \frac{9}{4} < 3 \\ 2\frac{1}{4} < 3 \end{array} \right)$ ✓

alors $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in I$ Bien Définie

6.1 c) $f(\ell) = \ell \iff \frac{3-\ell^2}{2} = \ell \iff \ell^2 + 2\ell - 3 = 0$, $\ell_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$
$\ell \geq 0$

$\left(\begin{array}{l} X^2 + pX + q = 0 \\ p = 2 \quad q = -3 \\ \Rightarrow X_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{array} \right)$

alors $\ell = 1$, on observe que $1 \in [0, \sqrt{3}]$

6.2 Conséquence de la prop. ci-dessous :
$(u_{2n}), (u_{2n+1})$ monotone
pour voir qui de deux suites extraites est croissante :

$u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{3-\frac{1}{4}}{2} = \frac{11}{8}$, $u_2 = \frac{3 - \left(\frac{11}{8}\right)^2}{2} = \frac{3 \cdot 64 - 121}{2 \cdot 64} = \frac{71}{128} = \frac{\frac{71}{64}}{2} > \frac{1}{2} = u_0 \Rightarrow u_{2n} \equiv v_n \nearrow$

sans calcul (PROP) $u_{2n+1} \equiv w_n \searrow$

6.3 $u_{2n} \equiv v_n \nearrow$ majorée par $\sqrt{3} \Rightarrow \exists \ell_1 \in [0, \sqrt{3}]$ t.q. $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = \ell_1$
$u_{2n+1} \searrow$ minorée $0 \Rightarrow \exists \ell_2$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = \ell_2$

En générale on ne peut pas en déduire que $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ et que u_n converge (cf. Ex. 2 !!!)

Mais ici $\ell_1 = \ell_2 \Rightarrow u_n \longrightarrow \ell_1 = \ell_2 \xRightarrow{6.1\ c)} u_n \to \ell = 1 \iff \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1}$

Preuve : plusieurs méthodes, ici on montrera q'une seule :

Observat° : $\boxed{w_n \equiv u_{2n+1} = f(u_{2n}) = f(v_n)} \Longrightarrow \ell_2 = f(\ell_1) = \frac{3 - (\ell_1)^2}{2}$

$w_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell_2$, $\quad f(v_n) \to f(\ell_1)$

$\Longrightarrow \ell_1 = f(\ell_2) = \frac{3 - (\ell_2)^2}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell_1$

$w_n = \ell_2$ $\qquad \underbrace{v_{n+1}}_{\ell_1} = u_{2n+2} = \underbrace{f(w_n)}_{f(\ell_2)}$

et f est continue

• Autre Méthode :
$\left. \begin{array}{l} 2\ell_2 = 3 - (\ell_1)^2 \\ 2\ell_1 = 3 - (\ell_2)^2 \end{array} \right\} 2(\ell_2 - \ell_1) = \underbrace{(\ell_2)^2 - (\ell_1)^2}_{(\ell_2+\ell_1)(\ell_2-\ell_1)}$

$\exists \ell_1, \ell_2$, mais Est-ce qu'eux sont égaux ??

Alors : $\Longrightarrow \boxed{(\ell_2 - \ell_1)(\ell_2 + \ell_1 - 2) = 0}$

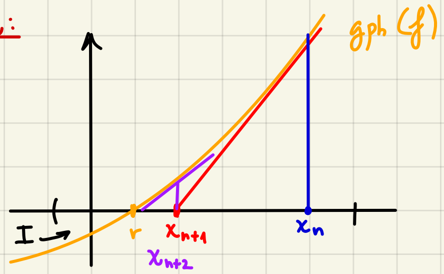
cas 1 : $\ell_2 - \ell_1 = 0$ ✓
cas 2 : $\ell_2 + \ell_1 = 2 \Rightarrow \ell_1 = 2 - \ell_2$
$\Rightarrow \ell_1 = 2 - \ell_2 = \frac{3 - (\ell_2)^2}{2} \iff \underbrace{1 - 2\ell_2 + (\ell_2)^2}_{(\ell_2 - 1)^2} = 0 \longrightarrow \left. \begin{array}{l} \ell_2 = 1 \\ \ell_1 = 2 - \ell_2 = 1 \end{array} \right\} \ell_1 = \ell_2$

exam

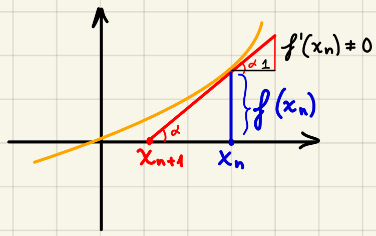
II.5.3 Méthode de Newton → Utile pour TP-PhysNum !

But: Trouver des approximations des racines r d'une fonction f. $(f(r)=0)$

L'idée:



Supposons $f \in C^1(I)$, $r \in I$, $f' \neq 0$ ds I



Thm: d'intersection:

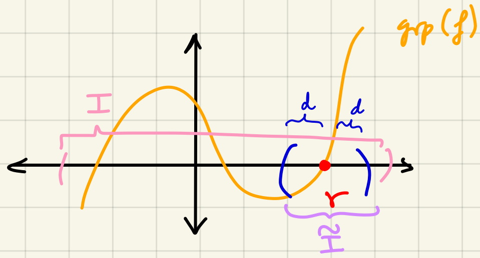
$$\frac{f'(x_n)}{1} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \iff x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Une fonct. C^2 (2 fois dérivable) $\Longrightarrow$ Continue

Thm: I ouverte, $f \in C^2(I,\mathbb{R})$, $\exists\, r \in I$ t.q. $f(r)=0$. $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$.

$\Longrightarrow \exists\, d>0$ t.q. $[r-d, r+d] =: \tilde{I} \subset I$ t.q.

1) $\forall\, x_0 \in \tilde{I}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = r$
2) Convergence rapide



Preuve: 1) $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $g'(x) = \cancel{1} - \dfrac{\cancel{f'(x) f'(x)} - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \dfrac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$ (*)

$\left(\text{alors } g' = \dfrac{f \cdot f''}{(f')^2}\right)$

$f \in C^2 \Longrightarrow \boxed{g \in C^1(I,\mathbb{R})}$

$(*) \Longrightarrow \boxed{g'(r) = 0}$, $\boxed{g' \in C^0 \text{ (continue)}}$ $\Big\}$ $(**)$

$f(r)=0 \Longrightarrow g(r)=r \Longrightarrow \boxed{r \text{ est un P.F. de la fonct° } g}$

Déf. Continuité

$(**) \Longrightarrow \forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0 : |x-r|<\delta \Longrightarrow |g'(x) - g'(r)| = |g'(x)| < \varepsilon$

- Soit $k =]0,1[$ $\varepsilon := k$, $\delta \equiv d$: $|x-r| < d$ $\left(\iff x \in \underbrace{[r-d, r+d]}_{\tilde{I}}\right)$

$\Downarrow$

$$\boxed{g'(x) < k \quad \forall x \in \tilde{I}}$$

$\Longrightarrow g$ est contractante sur $\tilde{I}$ et r P.F de g. $\square$

2) $\varepsilon_{n+1} = |x_{n+1} - r| \equiv |g(x_n) - r| \equiv$

$\equiv \left| x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r \right| =$

$= \underbrace{|x_n - r|}_{\varepsilon_n} \cdot \underbrace{\left| 1 - \underbrace{\frac{1}{f'(x_n)}}_{\to \frac{1}{f'(r)}} \cdot \underbrace{\frac{f(x_n) - f(r)}{x_n - r}}_{\to f'(r)} \right|}_{0}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = 0$ $\square$

Convergence Rapide

II.5.4 Des suites linéaires d'ordre 2

$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$, u_0 u_1 données, on cherche u_n. $(\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ données$)$

Rappel: récurrente lin d'ordre 1

$u_{n+1} = r \cdot u_n \Longrightarrow \boxed{u_n = r^n \cdot u_0}$

(**Rq:** $f(x) = x - r \Rightarrow r$ est une racine de f).

Notation: $p = -\alpha$, $q = -\beta$

$f(X) = X^2 + pX + q$, $\Delta = p^2 - 4q$ | $r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

r_1 et r_2 des racines.

Thrm: 1) Soit $\Delta \neq 0 \Longrightarrow r_1 \neq r_2$

par ❤ $u_n = A \cdot (r_1)^n + B \cdot (r_2)^n$

$\left(\text{avec } A = \frac{u_1 - u_0 \cdot r_2}{r_1 - r_2} \text{ et } B = u_0 - A\right)$

2) Soit $\Delta = 0 \Longrightarrow r_1 = r_2 =: \boxed{r \neq 0}$ hypothèse

par ❤ $u_n = (A + nB) r^n$ $\left(\begin{array}{l} A = u_0 \\ B = \frac{u_1}{r} - u_0 \end{array}\right)$

Preuve: 1) il suffit de vérifier que $u_n = r^n$ est une solut° si $r \in \{r_1, r_2\}$ (linéarité!)

$$u_{n+2} = r^{n+2} = r^n \cdot r^2 \stackrel{?}{=} \alpha \cdot r + \beta r^n \equiv r^n(-p \cdot r - q) \overset{r \neq 0}{\Longleftrightarrow} r^2 + pr + q = 0 \checkmark$$

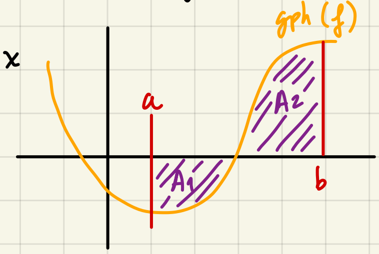
car r est une racine de f.

2) Calcul directe (a vous!)

Pour le début de la fiche 4:

1) $\int_a^b f(x)\,dx$

↳ Ex (2,3)



2) Intégration par Parties:
IPP (Ex. 7,8)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx \overset{\text{Thm}}{\underset{\text{IPP}}{=}} \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{b} - \underbrace{\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx}_{\text{utile si}}$$

On cherche des foncts° u et v t.q.

utile si
Soit plus simple
soit similaire à I

Notation:

$$\Big[F(x)\Big]_a^b := F(b) - F(a)$$

Exple:

1) $$\int_0^1 \underset{u}{x}\cdot \underset{v'}{e^x}\,dx = \Big[x\cdot e^x\Big]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 1\cdot e^x\,dx}_{\text{simple}} = e - 0 - \Big[e^x\Big]_0^1 = e-(e-1) = 1$$

$u(x) = x$, $v'(x) = e^x$
$u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$

2) $$\int_2^3 \ln(x)\,dx = \underbrace{\Big[x\cdot\ln(x)\Big]_2^3}_{3\ln 3 - 2\ln 2} - \underbrace{\int_2^3 \frac{x}{x}\,dx}_{\int_2^3 1\,dx = 1} = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$$

$u(x) = \ln(x)$, $x'(x) = 1$
$u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$