Chapitre II: Derivées et accroisements finis

31/01 Bricey ANALYSE 2

II.1 Dérivées

Rappel: (sur la continuité) $f : I \to \mathbb{R}$, I un intervalle

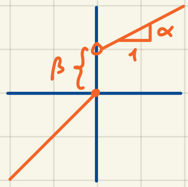
f est continue en $a \in I \overset{\text{Déf.}}{\iff} \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ✻

✻ $\iff$ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n \in \underline{\underline{I\setminus\{a\}}}$ on a: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)} = \boxed{f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)}$

f est continue ssi f est continue en a $\forall a \in I$.

Continue en a à gauche (à droite) ssi $\lim\limits_{x\to a^-_+}$ ds ✻ càd. $x_n < a$. $(x_n > a)$.

Exple: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixé.



$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixé

f est continue $\iff \beta = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraire).

$\boxed{f \text{ continue à gauche toujours!}}$

f continue à droite $\iff \beta = 0$

Déf: $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ ssi $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$ avec $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$. ($\Delta$)

Si dérivable en a on appelle $f'(a) := \ell$ la derivée de la fonct. en a.

Elle est dérivable si dérivable au tout pt. $a \in I$.

f est dérivable à gauche ssi $\boxed{\ell_g := \lim\limits_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ $\exists \in \mathbb{R}$ ($\square$)

(à droite) $\boxed{\ell_d := \lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

Remarques:

1) (Δ) $\iff \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}$

($\square$) $\iff \lim\limits_{h\to 0-}$ " $= \ell_g \in \mathbb{R}$

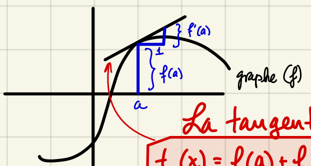
2) (Δ) $\iff \exists\, \ell \in \mathbb{R}$ t.q. $\boxed{f(x) = f(a) + \ell(x-a) + o(x-a)}$ $\rightarrow$

Rq: petit o.

$g(x) = o(x-a) \iff$ t.q. $g(x) = \varepsilon(x)\cdot(x-a)$

$\downarrow$

$\exists\, \varepsilon(x)$ ds. voisinage de $a \in I$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$



$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + o(x-a) \text{ DL d'ordre 1}}$ $\underbrace{}_{\text{autour de } a.}$

La tangente en $a \in I$.

$\boxed{t(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)}$

Notation:

DL: Développement limité d'ordre n

- Soit a un nombre réel et f une fonction définie dans un voisinage de a.

→ On appelle DL de f à l'ordre n au voisinage de a un polynôme P_n de degrés inférieur ou égal à n, t.q. $f(x) = P_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$

- avec petit o: $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)$

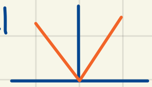
Prop: $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$.

$\Downarrow$ $\cancel{\Uparrow}$ (en générale)

continue en a

Preuve: $f(x) = f(a) + \underbrace{f'(a)\cdot(x-a) + o(x-a)}_{\xrightarrow{x\to a} 0}$ $\square$.

Exple: $f(x) = |x|$



f continue, $(D_g f) = -1$ $\overset{\#}{\Longrightarrow}$ pas dérivable en 0.
$(D_d f) = +1$

Prop: Si f est dér. à gauche et à droite en a ET $(D_g f)(a) = (D_d f)(a)$ alors $\begin{cases} f \text{ dér en } a \\ \text{et} \\ f'(a) = (D_g f)(a) \end{cases}$

Exple: $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \alpha x + \beta, & x > 0 \end{cases}$ est dérivable en 0 $\iff \beta = 0$ et $\alpha = 1$

dérivable à gauche en 0 ($\iff \forall \alpha, \beta$) toujours $(D_g f)(0) = 1$

dérivable à droite en 0 $\iff \beta = 0$ $\longrightarrow$ $(D_d f)(0) = \alpha$

Thrm: f, g dérivable en $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$
1) $f + \lambda g$ et dérivable en a et $(f+\lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$
2) $f \cdot g$ —— " —— $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ Leibniz Formula

Preuve:
1) Simple!
2) $$\lim_{x \to a} \frac{(f\cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a)}{x-a} + g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right] =$$

$$\underbrace{\lim_{x \to a} f(x)}_{f(a)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a} \left(\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right)}_{g'(a)} + g(a) \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{f'(a)} \quad \square.$$

Prop: $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$ alors f dérivable et $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

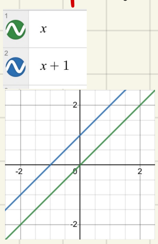
Preuve: $n = 0$, $f_0(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to a} \frac{f_0(x) - f_0(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{1-1}{x-a} = 0$
le reste par récurrence.
- Initialisation: $n = 1$ $\quad f_1(x) = x \quad f_1'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$ $\quad 1\ (x \neq 0)!$
- Hérédité: $f'_{n+1}(x) = (x \cdot x^n)' = (f_1(x) \cdot f_n(x))' \underset{\text{Leibniz}}{=} \underbrace{f_1'(x)}_{1} \cdot f_n(x) + f_1(x) \cdot \underbrace{f_n'(x)}_{\text{par l'hyp. } nx^{n-1}} = x^n + x n x^{n-1} = (n+1)x^n$ $\square$.

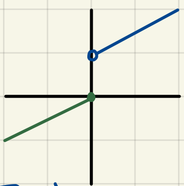
Thrm: (règle de chaîne).
$g : I \to \mathbb{R}$ dérv. en $a \in I$ et
$f : J \to \mathbb{R}$ $g(I) \subset J$, dérv. en $b = g(a)$, alors $h := f \circ g$ est dérivable en $a \in I$ et $h' = (f' \circ g) \cdot g'$

$\left(h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \right)$

Exple: $h(x) = \cos(x^2)$
$h'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x$

Rq: $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ $\quad f$ est dérivable en $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$
mais $\lim_{x \to 0} f'(x) \neq f'(0)$ $\quad ! \nexists !$





translation de +1 en haut de la droite "x".

Preuve (du Thrm): $$F(y, b) := \begin{cases} \frac{f(y) - f(b)}{y-b} & \text{si } y \neq b \\ f'(b) & \text{si } y = b \end{cases}$$

la fonction est bien définie et elle est continue $\left(\lim_{y \to b} F(y, b) = f'(b) = F(b, b) \checkmark \right)$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \lim_{x \to a} \left[F(g(x), g(a)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right] = \lim_{x \to a} F(g(x), g(a)) = F(g(a), g(a)) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \quad \square.$$

F continue, g continue

II.2 Accroisements Finis

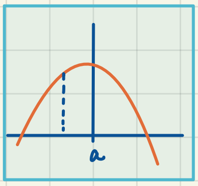
Déf: $f : I \to \mathbb{R}$
1) $a \in I$ est un maximum (min) ssi $f(a) \geq f(x)$ $(\leq)$ $\forall x \in I$

2) $a \in I$ est un max. locale (min loc.)
s'il $\exists$ $\varepsilon > 0$ que a est un max (min) de $f\big|_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[}$

f restriction de l'ensemble

Thrm: $f: I \to \mathbb{R}$ $a \in \mathring{I}$ $\leftarrow$ l'intérieur de l'intervalle I.
dérivable. a est un extremum locale $\Rightarrow$ $\boxed{f'(a)=0}$

Preuve: $f\big|_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[}$ est soit a maximum (sim. pour min)

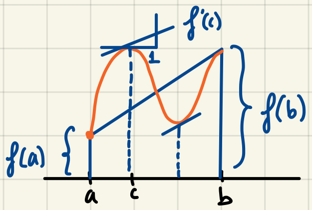


$$\left.\begin{aligned} h>0. \quad & \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0 \\ h<0: \quad & \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0 \end{aligned}\right\} \lim_{h\to 0}$$

neg!

$f'(a) \leq 0$ et $f'(a) \geq 0$ alors $f'(a)=0$ □

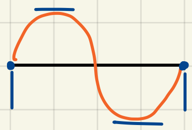
Théorème des Accroissements Finis (TAF)



$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ (i) continue
(ii) dérivable sur $]a,b[$
$\Rightarrow \exists\, c \in]a,b[$ t.q. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

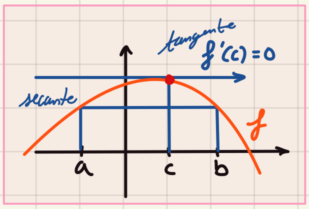
Corollaire: (TAF - inégalité des acc. finis)
si $|f'| \leq M$ sur $]a,b[$ alors $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq M$

Preuve:
1) **Lemme:** (cas $f(a)=f(b)$) $\leftarrow$ (**Thrm: de Rolle**)



Preuve: (de Lemme) : f cont. sur $[a,b]$ $\Rightarrow$ f a un point c d'extremum
- cas 1 : $f(x) = \text{const.}$ ✓ (Thm des extremums).
- cas 2 : $f'(c) = 0$ □.

tangente parallèle à la secante :



2) cas générale: $g(x) = f(x) - (x-a)\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\Rightarrow$ $g(a)=g(b)$

(explicitement : $g(a)$, $g(b) = f(b) - \cancel{(b-a)}\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}} = f(a)$)

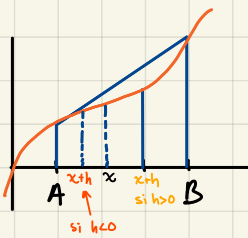
g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

$\rightarrow$ **Thrm de Rolle** : pour g. $\exists\, c \in]a,b[$ t.q. $g'(c)=0$, $g'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
(Lemme ci-dessous)

alors $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ □.

Corollaire: $f: [A,B] \to \mathbb{R}$ cont. et dériv. sur $]A,B[$.
f croissante $\Leftrightarrow$ $f' \geq 0$
f décroissante $\Leftrightarrow$ $f' \leq 0$

Preuve: (pour croissante).
$\Rightarrow)$ $x \in [A,B]$
$h \neq 0$ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ≤ 0 / ≥ 0

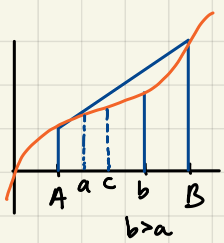


$\Leftarrow)$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \geq 0$
car $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in]A,B[$

$\boxed{\forall a,b \in]A,B[}$ $\exists\, c$

$x \in]A,B[$
f dérivable $\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \geq 0$

alors $f(b) \geq f(a)$ croiss.



□.