Chapitre I: Des Fractions Rationelles

24/01
Africey
ANALYSE 2

I.1. Décomposition des polynômes en facteurs irréd. (Rappel / des compléments / exples)

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ $\mathbb{K}[X] \ni P$, $P(X) = a_d X + \dots + a_i X + a_0 X$ où $a_i \in \mathbb{K}$

$a_d \neq 0 \to \deg P = d$

$(\deg(0) := -\infty)$

Déf: P est irréd. $\overset{ssi}{\Longleftrightarrow}$ $\left(\begin{matrix} Q \mid P \\ Q \in \mathbb{K}[X] \end{matrix} \Rightarrow \deg Q = 0\right)$

Prop:
1) $P \in \mathbb{C}[X]$ irréd. alors $\exists\ c, C \in \mathbb{C}$ $P(X) = C \cdot (X - c)$
2) $P \in \mathbb{R}[X]$ irréd. alors soit $P(X) = C \cdot (X - c)$, $c, C \in \mathbb{R}$
soit $P(X) = C \cdot (X^2 + pX + q)$, $C, p, q \in \mathbb{R}$, et $\Delta = p^2 - 4q < 0$

Thrm Fondamental de l'Algèbre: Chaque $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ peut être factorisé aux facteurs irréductibles.
autrement dit:
1) $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ alors $\exists\ C, c \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{N}^*$ t.q. $P(X) = C * (X - c)^{n_1} * \dots * (X - c_n)^{n_m}$
2) $P(X) \in \mathbb{R}[X]$: $\exists C, c_i, p_i, q_i$ (avec $\Delta_i = (p_i)^2 - 4q_i < 0$)
$\exists\ n_i, m_i \in \mathbb{N}^*$ t.q. $P(X) = C(X - c_i)^{n_i} * \dots * (X - c_m)^{n_m} * (X^2 + p_i X + q_1)^{m_1} * \dots * (X^2 + p_k \cdot X + q_k)^{m_k}$

Rq: $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$
$P(X) = a_d X^d + \dots + a_i X + a_0$ où $a_i \in \mathbb{R}$ si $c_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ t.q. $P(c_i) = 0 \Rightarrow P(\overline{c_i}) = 0$

$$(X - c_i)(X - \overline{c_i}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(c_i)\,X + |c_i|^2$$

$$\Delta = 4(\mathrm{Re}(c_i))^2 - 4\underbrace{|c_i|^2}_{(\mathrm{Re}(c_i))^2 + (\mathrm{Im}(c_i))^2} = -4(\mathrm{Im}(c_i))^2 < 0$$

Prop:
1) $P(c) = 0 \Longleftrightarrow (X - c) \mid P$ (c est une racine de P)
2) $P(c) = P'(c) = \dots = P^{(n)}(c) = 0 \Longleftrightarrow (X - c)^{n+1} \mid P$ (c est une racine de multiplicité n+1)

Thrm: Soit $P \in \mathbb{Z}[X] \Leftrightarrow P(X) = a_d X^d + \dots + a_i X + a_0$ où $a_i \in \mathbb{Z}$.

Alors s'il existe une racine $c = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_d$

"$p \perp q$" : Premiers entre eux!

Corollaire: si $a_d = 1$ · $c = p \mid a_0$

Preuve:

$$a_d \left(\frac{p}{q}\right)^d + \dots + a_i \frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad / \; q^d$$

multiple de q. $q \mid a_d$

$$\underbrace{a_d \cdot p^d + \overbrace{a_{d-i} \cdot q \cdot p^{d-1} + \dots + a_i \cdot q^{d-1} \cdot p + a_0 \cdot q^d}^{\text{multiple de } q}}_{\text{est une multiple de } p} = 0$$

est une multiple de p $\Rightarrow$ $p \mid a_0$ (car $p \perp q$) $\square$.

Exples:

1) $P(X) = 1X^3 - 5X + 2$ cste s'il $\exists\, c \in \mathbb{Q}$ racine $\Rightarrow c \in \mathbb{Z}$, et $c | 2$ $\Rightarrow c \in \{+1, -1, +2, -2\}$.

- essayons: pour $\boxed{x=1}$: $P(1) = -2 \neq 0$, pour $\boxed{x=-1}$: $P(-1) = 6 \neq 0$, pour $\boxed{x=2}$: $P(2) = 8 - 10 + 2 = 0$ ✓

$\Rightarrow P(X) = (X-2)(1X^2 + pX - 1) \Rightarrow P(1) = (-1)(1+p-1) = -p = -2 \Rightarrow p = 2$

$\Delta = 4 + 4 = 8\ (>0)$ ∴

$P(X) = (X-2)(X^2 + 2X - 1)$ alors encore réductible.

- Pour calculer p:

$X^2 + pX + q = 0$

$X_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, $p=2$

$X^2 + 2X - 1 = 0$ Racines!

$x = 0$, $x_{1,2} =$ $X_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

- Résultat:

$$\boxed{X^3 - 5X + 2 = (X-2)(X+1-\sqrt{2})(X+1+\sqrt{2})}$$

Irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

2) $X^3 - 3X + 2 = (X-1)(X^2 + pX - 2) - (X-1)\underbrace{(X^2 + X - 2)}_{(X-1)(X+2)} = (X-1)^2(X+2)$

linéaire

coeff. de X^2 : $0 \overset{!}{=} -1 + p \Rightarrow p = 1$

à gauche

$\boxed{\text{R.q. } P'(X) = 3X^2 - 3 \quad P'(1) = 0}$

3) $X^3 + 2X^2 + X + 2 = (\ldots) = (X+2)(X^2+1)$ sur $\mathbb{R}$

$= (X+2)(X-i)(X+i)$ sur $\mathbb{C}$

à vous

4) $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$ sur $\mathbb{R}$

$X^{n+1} - 1 = (X-1)(X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1)$ $- \ldots = (X-1)\left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sur $\mathbb{C}$.

5) $P(X) = X^3 + 1 = -Y^3 + 1 = -\underbrace{(Y^3 - 1)}_{(Y-1)(Y^2+Y+1)} = (X+1)(X^2 - X + 1)$

$Y := -X$

$-X - 1 = X + 1$

par exple sur $\mathbb{R}$

6) $X^4 - 1 = (X^2)^2 - 1^2 = (X^2+1)(X^2-1) = (X^2+1)(X+1)(X-1)$

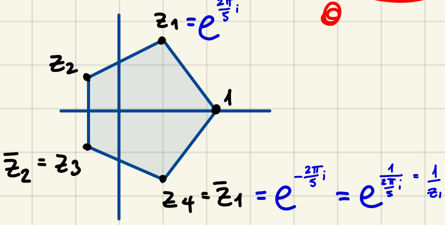
7) $X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$ méthode principale 4^{me} racines complexes de -1.

mais aussi cette astuce/méthode ici: $\underbrace{(X^2)^2 + 2X^2 + 1}_{(X^2+1)^2} - 2X^2 = (X^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,X)^2 =$

$= \boxed{(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)}$

8) $P(X) = X^5 + 1$ (impaire) $\boxed{\text{factoriser sur } \mathbb{R}}$ avec la méthode en utilisant $\mathbb{C}$: $z^5 = 1 \Rightarrow z \in \left\{ e^{i\frac{2\pi}{5}\cdot k}, k = 0 \ldots 4 \right\}$

$\Rightarrow z \in \left\{ 1, z_1 = e^{\frac{2\pi i}{5}}, z_2 = e^{\frac{4\pi i}{5}}, z_3 = \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}, z_4 = \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1} \right\}$



Sur $\mathbb{C}$: $P(X) = (X-1)(X-z_1)(X-z_2)(X-\bar{z}_1)(X-\bar{z}_2) =$

$(X-1)(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1)X + 1)(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_2)X + 1)$

$|z_1|^2$

$\mathrm{Re}(z_1) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$\mathrm{Re}(z_2) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

$$\boxed{P(X) = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right)X - 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\tfrac{4\pi}{5}\right)X + 1\right)}$$

$$\sum_{k=0}^{4} z_k = 1 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4$$

$$z_k = (z_1)^k \qquad z_2 = (z_1)^2,\quad z_3 = \frac{1}{(z_1)^2},\quad z_4 = \frac{1}{z_1}$$

Rappel:

$$S_N(q) := \sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

$$q \cdot S_N(q) = S_N(q) - 1 + q^{N+1}$$

mais aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} z_4 = \sum_{k=0}^{4} (z_1)^k = \frac{1-(z_1)^5}{1-z_1} = 0$

$$\underbrace{1 + z_1 + \frac{1}{z_1}}_{=:y} + \underbrace{(z_1)^2 + \frac{1}{(z_1)^2}}_{y^2-2} = 0$$

$$y^2 + y - 1 = 0$$

$$y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y = z_1 + \frac{1}{z_1} = z_1 + \overline{z_1} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$$

$-$: $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

$+$: $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

$$1 + \frac{1}{(z_2)^2} + z_2 + \frac{1}{z_2} + (z_2)^2 = 0$$

$$y := z_2 + \frac{1}{z_2} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$y^2 + y - 1$

alors $\boxed{P(X) = X^5 - 1 = (X-1)\left(X^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}X + 1\right)\left(X^2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}X + 1\right) \quad (\text{sur } \mathbb{R})}$

I.2 Fractions rationelles / DES Décomposition en éléments simples.

- $x \in \mathbb{Q}$ $\quad x = \frac{p}{q}$ $\quad p \perp q$ et si $p \geq q$ $\exists$ partie entière de x.

<u>Exple:</u> $\frac{42}{15} = 2 + \frac{12}{15} = 2 + \frac{4}{5}$

$\quad 12 \cancel{<} 15$

<u>Déf:</u> 1) $F(x)$ est une fonction rationnelle s'il $\exists$ $P(X), Q(X)$ des polynômes (à coeff sur $\mathbb{R}, \mathbb{C}$). t.q. $F(x) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ $\quad (Q(X) \neq 0)$

2) $\deg F := \deg P - \deg Q$ $\quad 4-3=1$

<u>Exple principale:</u> $F(X) = \dfrac{X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 7X + 6}{X^3 - 3X^2 - X + 3}$

Observation ~~Déf~~: $F(X) = \frac{P}{Q} = E(X) + \frac{R(X)}{Q(x)}$ ✱ $\quad$ le reste de la Div. Euclid.

$\deg F > 0$

$\exists$ une partie entière $E(x)$
(non-nulle)

$= E(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$ avec $\tilde{P} \perp \tilde{Q}$ $\quad$ "tilde": autre polynôme.
$(\deg \tilde{P} < \deg \tilde{Q})$

Première partie
de la décomposition

1 $\deg F = \boxed{1} > 0$ alors, Division Euclid.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 7X + 6 & X^3 - 3X^2 - X + 3 \\
\hline
x\cdot 1 & -(X^4 - 3X^3 - X^2 + 3X \quad) & X + 6 \\
 & -\cancel{X^4} + 3X^3 + X^2 - 3X & \\
\hline
 & 6X^3 - 2X^2 - 10X + 6 & \\
 & -\ 6X^3 + 18X^2 - 6X - 18 & \\
\hline
 & 16X^2 - 4X - 12 & \\
\end{array}
$$

facteur com.

$$\boxed{F(X) = X + 6 + 4\,\frac{4X^2 - X - 3}{X^3 - 3X^2 - X + 3}}$$

C'est de la forme ✱

2 Trouver pgcd $(4X^2 - X - 3)(X^3 - 3X^2 - X + 3)$

méthode 1: Algorithme d'Euclide.

méthode 2: Développer nom. et denom. en éléments inréductibles et simplifier.

c.f. $\frac{12}{15} = \frac{\cancel{3} \times 2 \times 2}{\cancel{3} \times 5} = \frac{4}{5}$
$\quad$ 3 le pgcd.

$\frac{1}{4} R(X) = 4X^2 - X - 3 = \underline{(X-1)}\ (4X+3)$

$Q(X) = X^3 - 3X^2 - X + 3 = (X-1)(X^2 + pX - 3) = \underline{(X-1)}(X^2 - 2X - 3)$ $\quad$ pas inréduct.
$\quad$ pq poly deg 2 $\quad$ évident $\quad (X+1)(X-3)$

$-1 = -3 - p$

$\frac{R(X)}{Q(X)} = \frac{4X+3}{X^2 - 2X - 3} = \frac{4X+3}{(X+1)(X-3)}$ $\quad$ Premiers entre eux. $\perp$

$$\boxed{F(X) = \underbrace{X + 6}_{R(X)} + \underbrace{4}_{\text{facteur commun}}\ \underbrace{\frac{4X+3}{(X+1)(X-3)}}_{\frac{R(X)}{Q(X)}}}$$

Thm: $\deg F < 0$ et F est en forme réduite : $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$, $P \perp Q$

soit $Q(X) = \underbrace{Q_1^{n_1}(X) \times \dots \times Q_n^{n_n}(X)}_{\text{Irréductibles sur } \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}}$ t.q. $\deg A_i < \deg Q_i$

alors $\exists A_{11}, \dots, A_{mn} \in \mathbb{K}[X]$ et $F(X) = \dfrac{A_{11}(X)}{Q_1(X)} + \dfrac{A_{12}(X)}{Q_2(X)} + \dots + \dfrac{A_{21}(X)}{[Q_1(X)]^2} + \dots + \dfrac{A_{n1}(X)}{(Q_n(X))^{n_1}} + \dots$

en particulier.

si $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \deg Q_i = 1$ $\quad F(X) = \dfrac{A_{11}}{X-c_1} + \dfrac{A_{12}}{X-c_1} + \dfrac{A_{12}}{(X-c_1)^2} + \dots + \dfrac{A_{1n}}{(X-c_1)^n} + \dots$

c_i est une racine de Q à multiplicité n_i $\quad A_{ij} \in \mathbb{C}$

si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$Q(X) = (X-c_1)^{n_1} * \dots * \underbrace{(X^2+p_1X+q_1)^{m_1}}_{(\Delta_1 < 0)} * \dots \Rightarrow$$

$$F(X) = \frac{\alpha_1}{X-c_1} + \frac{\alpha_2}{(X-c_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(X-c_n)^{n_1}} + \dots + \frac{\beta_1+\gamma_1 X}{X^2+p_1X+q_1} + \dots + \frac{\beta_{m_1}+\gamma_{m_1} X}{(\quad)^{m_1}} + \dots$$

Exple:

1) $\circledast \quad \dfrac{4X+3}{(X+1)(X-3)} = \dfrac{A}{X+1} + \dfrac{B}{X-3}$ $\quad (\exists B, C \in \mathbb{R} \Leftarrow \text{Thm})$

pour calculer A et B:

• méthode 1. multiplier $\circledast$ par $Q(x)$ et développer.

$$4X+3 = \underbrace{A(X-3)+B(X+1)}_{(A+B)X + B-3A} \iff \begin{cases} A+B = 4 \\ B-3A = 3 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow B = \frac{15}{4} \end{matrix}$$

$$\frac{4X+3}{(X+1)(X-3)} = \frac{1}{4(X+1)} + \frac{15}{4(X-3)}$$

$$\boxed{F(X) = X+6 + 4 \underbrace{\frac{4X+3}{(X+1)(X+3)}}_{\text{forme réduite.}} = X+6 + \frac{1}{X+1} + \frac{15}{X-3}}$$

• méthode 2:

• pour A : $\left[(X+1)(\circledast)\right]\Big|_{X=-1.} \iff \dfrac{1}{4} = A$

$$\frac{4X+3}{(X+1)(X-3)} =$$

• pour B: $\left[(\circledast)(X-3)\right]\Big|_{X=-3} \iff \dfrac{15}{4} = B$

$$\frac{4X+3}{(X+1)(X-3)} =$$

2) $F(X) = \dfrac{2X-1}{X^2-X}$ à vous $F(X) = \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{X-1}$ __application__ : $\displaystyle\int_2^3 F(x)\,dx = \underbrace{\int_2^3 \frac{1}{X}\,dx}_{\ln 3 - \cancel{\ln 2}} + \underbrace{\int_2^3 \frac{1}{X-1}\,dx}_{\int_1^2 \frac{1}{u}du = \cancel{\ln}(2) - \underbrace{\ln 1}_{0}} = \ln(3)$

3) $F(x) = \dfrac{5x^2+2x+2}{x^3-1}$

Mettre le denom en facteurs:

$X^3-1 = (X-1)\underbrace{(X^2+X+1)}_{\Delta=-3}$

Thrm: $\circledast$ $\dfrac{A}{X-1} + \dfrac{B+CX}{X^2+X+1}$

- Pour A: $(\circledast)(X-1)\Big|_{X=1}$ $A = \dfrac{9}{3} = 3 \Rightarrow$ $A=3$

$(1)^2+(1)+1=3$

- pour le reste (B et C):

choisissiez deux valeurs simples pour X et mettre des $(*)$.

Prendre "We want to show this equality is true".

$F(0) = -2 \overset{!}{=} \dfrac{3}{-1} + B \Rightarrow$ $B=1$

$F(-1) = -\dfrac{5}{12} \overset{!}{=} \dfrac{3}{-2} + \dfrac{1-C}{1} \Rightarrow$ $C=2$

Résultat.

$$\boxed{F(x) = \frac{3}{X+1} + \frac{2X+1}{X^2+X+1}}$$

Pour vous entraîner:

4) $\dfrac{X^5+4X^2-8X+9}{X^3-3X+2} = \underbrace{X^2+3}_{\text{P.ent.}} + \dfrac{2X^2+X+3}{X^3-3X+2} \overset{\perp}{=} X^2+3 + \dfrac{1}{X+2} + \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{2}{(X-1)^2}$

5)* $\dfrac{4X^5+2X^4-4X^3-3X^2+X+4}{2X^3+X^2+X-1} = 2X^2-3 + \dfrac{2}{2X-1} + \dfrac{1}{X^2+X+1}$