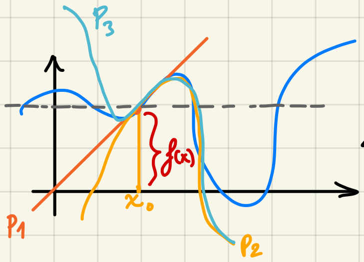
V.3 Développements limités et formule de Taylor

25/04 Gricey ANAL. 2



Idée: approximer autour d'un point une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ par des polynômes

- $(f - C^\infty)$
- $P_1(x) = \underbrace{f(x_0)}_{a_0} + \underbrace{f'(x_0)}_{a_1}(x - x_0)$

- P_n un polynôme de degré n
- $P_n(x) = a_0 + a_1\cdot(x-x_0) + a_2\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$

Pour continuer faisons pour $x_0 = 0$ d'abord

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \quad \text{et on veut que} \quad f^{(k)}(0) \overset{!}{=} (P_n^{(k)})(0) \qquad \forall k = 0, \ldots, n$$

(càd: $f(0) \overset{!}{=} P_n(0)$, $f'(0) = P_n'(0)$, etc).

$$\frac{d^l}{dx^l}(P_n(x)) = \frac{d^l}{dx^l}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k\right) = a_l \cdot l! + o(x) \Longrightarrow P_n^{(l)}(0) = \begin{cases} 0 & l > n \\ a_l \cdot l!, & l \le n \end{cases}$$

Exple: $n = 3$, $l = 1$ $\quad \frac{d^2}{dx^2} = (\underbrace{a_0}_{0} + \underbrace{a_1 x}_{0} + a_2 x^2 + a_3 \cdot x^3) = \underbrace{a_2 \cdot 2 \cdot 1}_{2!} + \underbrace{a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x^1}_{o(x)}$

alors: Soit $k \le n$, $P_n^{(k)} = (0) = k! \cdot a_k \overset{!}{=} f^{(k)}(0) \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Longrightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \equiv$

$$\equiv f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Déf: Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ alors son polynôme de Taylor à $x_0 \in I$ est $\boxed{T^f_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$

Notation: $T^f_{n,(x_0=0)}(x) :=$ C'est le polynôme de Taylor à l'ordre n pour la fonction f en $x_0 = 0$

Rq: 1) sur la notation:

Si c'est claire desquels x_0 et/ou f on parle,

on simplifie la notation: $T_n(x) \equiv T_n(x) \equiv T^f_{n,x_0}(x) \equiv T_{n,x_0}(x)$.

2) comparer $T^f_{n,0}$ avec T^f_{n,x_0}

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k =: P_n(x)$$

$$T^f_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \tilde{P}_n(x-x_0)$$

où $\tilde{P}(x) = \sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot x^k$

avec la notation, on observe que $P_n(x) \ne \tilde{P}_n(x)$

cf. motivation ci-dessus $\left(f^{(k)}(0) \longleftrightarrow f^{(k)}(x_0)\right)$.

Déf: Un polynôme $P_n(x)$, de degré n, satisfaisant que $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$ est appelé un developpement limité (DL) à l'ordre n, de la fonct. f.

Rq: S'il $\exists$ P_n est unique.

Thrm: Soit $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $I \subset \mathbb{R}$, $x, x_0 \in I$ alors

1) $f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n)$ (Taylor-Young)

ou le polynôme de Taylor (d'ordre n) donne un D.L. de f. à x_0 (et d'ordre n).

Déf: Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, $x, x_0 \in I$

alors on appelle $\boxed{R_n(x) = R^f_{n,x_0}(x)} := f(x) - T_{n,x_0}(x) \equiv \boxed{f(x) - T_n(x)}$

le reste d'ordre n.

Thrm: formule de Taylor-Lagrange.

2) $\exists\, \xi \in \begin{cases}]x_0, x[& \text{si } x > x_0 \\ ]x, x_0[& \text{si } x < x_0 \end{cases}$ t.q. $\boxed{R^f_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$

3) formule du reste intégrale $R^f_{n,x_0}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

Rq: C^{n+1} ci-dessus n'est pas nécessaire pour les points ci-dessus pour 2) on a une généralisation de TAF que l'on obtient pour $n=1$: Dans la notation du TAF on a plus précisement:

Corollaire: L'inégalité de Taylor-Lagrange.

Si $|f^{(n+1)}(x)| \le M_n \equiv M$ $\forall x \in I$, alors $|R(x)| \le M_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

Thrm: Soit $a < b$, $f \in C^n([a,b])$, $f \in \mathcal{D}^{n+1}(]a,b[)$, alors $\exists\,]a,b[$ t.q. $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

Preuves: (partielles)

1) **n=0** $T_n(x) \equiv f(x_0)$

$f(x) = f(x_0) + R_0(x)$ il faut m.q.

$R_0(x) = \underset{x\to x_0}{o}(1)$ c'est une conséquence simple de $f \in C^0$

$\lim_{x\to x_0} R_0(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = f(x_0)-f(x_0) = 0$ □.

n=1 $R_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$

M.q. $R_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^1\right) = (x-x_0)\cdot o(1)$

$f \in C^1$

$\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{de l'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to x_0} R_1'(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f'(x)-f'(x_0)\right) = 0$

$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = 0$ "$\frac{0}{0}$"

2) Utiliser théorème du Rolle (ou thm. plus precise)

3) Par récurrence:

n=0: $\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{T^f_{0,x_0}(x)} + \underbrace{\int_{x_0}^x f'(t)\,dt}_{R^f_{0,x_0}(x)}}$

Selon le Thm. d'Analyse Fond.

$\boxed{\int_{x_0}^x f'(t)\,dt = [f]_{x_0}^x = f(x) - f(x_0)}$ $\longrightarrow$ $f(x) = f(x)$ ✓

n→n+1 l'hypothèse: $T_n(x) + R_n(x) = f(x)$

$\boxed{T_{n+1}(x) + R_{n+1}(x)} \equiv \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{} + \boxed{\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt}$

$T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \boxed{T_n(x) + R_n(x) \overset{(*)}{=} f(x)}$

$\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt \overset{\text{IPP}}{=} \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\right]_{t=x_0}^x}_{-(x-x_0)^{n+1}\cdot f^{(n+1)}(x_0)} +$

$u(t) = (x-t)^{n+1}$, $v'(t)$

$u'(t) = -(n+1)(x-t)^n$, $v(t) = f^{(n+1)}(t)$

$+\frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\int_{x_0}^x (n+1)(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt}_{R_n(x)} = -\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + R_n(x)$

alors $(*)_{n+1}$ □.

Exples.

1) $f = \exp$, $x_0 = 0$

$\boxed{T_n^{\exp}(x)} = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k = \boxed{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}}$

$\exp^{(k)} = \exp$

$\exp(0) \equiv e^0 = 1$

2) $f = \exp$. $x_0 = 2$

Méthode 1: (déf de $T^f_{n,0}$) $T^{\exp}_{n,2}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k = e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(x-2)^k}{k!}$ proche

e^2

Méthode 2: en utilisant le résultat pour $x_0=0$

$f(x) = e^x = e^{2+(x-2)} = e^2\cdot e^{\tilde{x}}$ avec $\boxed{\tilde{x} \equiv x-2,\ x\to 2 \iff \tilde{x}\to 0}$

$f(x) = e^2\cdot e^{\tilde{x}} = e^2\left(\sum_{k=0}^n \frac{\tilde{x}^k}{k!} + o(\tilde{x}^n)\right) \equiv e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(x-2)^k}{k!} + \underbrace{e^2\cdot o(x-2)}_{o(x-2)}$

Souvent la méth. 2 est bcp. plus rapide. ↑ le résultat de 1)

3) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $x_0 = 0$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

	$x=0=x_0$
$f(x)$	$f(0) = 1$
	$f'(0) = 2$
	$f''(0) = \alpha(\alpha-1)$
	$f^{k}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)$

Notation: $\boxed{\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}}$

On observe que pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$: $n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

$\boxed{T_n^f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k \quad f(x)\equiv(1+x^\alpha)}$ $\overset{\alpha=\frac{1}{2}}{\underset{\text{exo.}}{\Longrightarrow}}$ $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$

Pour "la méth. 2"

Thrm: $f, g \in C^{n+1}$, $f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$ etc. alors:

1) $T_n^{f+g} = T_n^f + T_n^g$

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$ $T_n^{f+\lambda g} = T_n^f + \lambda T_n^g$

alors $T_n: C^{n+1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_n[X]$, $f \mapsto T^f_{n,x_0}(x)$ est une appl. lin. A.L.

⚠ 2) $T_n^{f\cdot g}(x) = T_n^f(x) \cdot T_n^g(x) + o((x-x_0)^n)$

Exples cf SolEx + TD.

⚠ 3) $h = f \circ g$ et $\boxed{g(x_0) = x_0}$

$$T^h_{n,x_0}(x) = T^f_{n,x_0}\left(T^g_{n,x_0}(x)\right) + o((x-x_0)^n)$$

Une randonné sur les fonctions entières: (pas de le programme).

Polynôme $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k,\ a_k \in \mathbb{R}$

on peut le prolonger naturellem^t à une fonct. $\hat{P}.\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

par $\hat{P}(z) = \sum_{k=0}^{\hat{n}} a_k \cdot z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Une fct. $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\lim_{n\to\infty} R^f_n(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ est appelé une fonction analytique

Exples. exp, sin, cos, ch, sh sont des fcts analytiques.

alors p.ex. $\boxed{e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\hat{n}} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$!!

On peut appliquer cette stratégie aussi aux fonctions analytiques (et leurs series entières) lar series de Taylor

p.e. Déf. $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\sin: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \longmapsto \dots$

Lemme: formule d'Euler

$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{C}$

$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$

Preuve: $e^{iz} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} =$

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2m}}{(2m)!}}_{ch(z)} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{sh(z)}$$

(partie paire

ou $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$(i)^{2m} = (i^2)^m = (-1)^m$

$(i)^{2m+1} = i \cdot (-1)^m$

alors $e^{iz} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{z^{2m}}{(2m)!} + i \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{\sin(z)}$

alors $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

et aussi $ch(iz) = \cos(z) \Longleftrightarrow ch(z) = \cos(-iz) = \cos(iz)$

ou $\boxed{ch(z) = \cos(ix) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$ ET $\boxed{sh(iz) = i \sin(z)}$

(en utilisant $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$)

ex. 1) Mq $ch^2(z) - sh^2(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2) En déd. $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$