V. Développements limités et Formule de Taylor

18/04
ANALYSE 2

(V.1 et V.2 pour les préparer)

V.1 Des formes indéterminées, Règle de l'Hôpital

"$\frac{0}{0}$", "$0\cdot\infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "1^∞" $\leftarrow$ p.e. $\lim_{x\to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Thm: Bernoulli, "règle de l'hôpital"

- $f,g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, f,g dérivable (à gauche) en a, $f(a)=g(a)=0$, $g'(x)\neq 0$ $\forall x \in]a,b[$ et

$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe. Alors $\boxed{\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$

($\square$)

- des analogues pour $x\to a-$ (do. $]c,a]$) et pour $f(a), g(a) \in \{\pm\infty\}$ avec $a\in\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ (ou $]c,\infty[$ $x\to\infty$)

Rq: $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a+} f'(x) \ \exists \\ \lim_{x\to a+} g'(x) = c\in\mathbb{R}^*\end{array}\right\} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} (\square)$

La Preuve utilise le TAF généralisé (TAF $\Longleftarrow$ Lemme de Rolle), pas fait ici.

Preuve:

- (pour $f,g \in C^1(\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$, $f'(a)\neq 0\neq g'(a)$ et $f(a)=g(a)=0$):

la dérivée est continue

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \overset{C^1}{=} \frac{\lim_{x\to a} f'(x)}{\lim_{x\to a} g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \square.$$

Exples:

① $\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}}_{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(2x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{1} = 2$

② $\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$

③ $\underbrace{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{1^{\pm\infty}} \overset{\text{Déf}}{=} \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\right] \underset{\text{exp continue}}{=} \exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\right] \overset{2)}{=} \exp(1) = e$

④ $\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}}_{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

⑤ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}}_{(\Delta)\ \text{"}\frac{0}{0}\text{"}} \underset{\text{de l'Hôpital}}{\overset{\text{de nouveau}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$

$g'(x) = 2x \neq 0$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ($0 = a$)

(Δ) existe — si (Δ) existe

un "non-exple"

⑥ $\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+1}}_{\neq\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x} = 1$ ← ce n'est pas "$\frac{0}{0}$"

I.2 Comportement autour d'un point (ou "∞")

Déf: $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ $(\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})$

1) On dit que f est dominée par g au voisinage de a (ou "en a" ou "si $x \to a$"), s'il existe un $B \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\boxed{|f(x)| \leq B\,|g(x)|}$ ds un voisinage de a (p.e. si $a \in \mathbb{R}$: $\exists\ \varepsilon > 0$ t.q. (*) est vrai $\forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$).

On écrit $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f = O_a(g)$ ou $f = O(g)$ si $x \to a$
ou simplement $\boxed{f = O(g)}$ (si a est fixé)

2) f est **négligeable** devant g au voisinage de a si $\boxed{f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)}$ pour une fonction ε t.q. $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On écrit $f \underset{a}{=} o(g)$, ou $f = o_a(g)$, $f = o(g)$ si $x \to a$ ou simplement $\boxed{f = o(g)}$ (de fois aussi $f \ll g$)

3) f est **équivalente** à g dans un voisinage de a si $f(x) = g(x)\,(1 + \varepsilon(x))$ pour un $\varepsilon(x)$ t.q. $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

On écrit $f \underset{a}{\sim} g$, $f \sim g$ si $x \to a$, ..., $\boxed{f \sim g}$

Rq's:

1) $\exists$ des notions analogues pour des suites, p.e. $u_n = O(v_n)$ si $u_n = v_n \cdot \varepsilon$ avec $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$

2) pour 2) et 3) de la déf il est suffisant que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 2) & 0 \\ 3) & 1 \end{cases}$ p.e. si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ alors $\boxed{f = o(g)}$

3) • $f \underset{a}{=} O(1) \iff \exists\ B > 0,\ \varepsilon > 0$ t.q. $|f(x)| \leq B\ \forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

• $\boxed{f \underset{a}{=} o(1) \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0}$ • $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \iff f - \ell \underset{a}{=} o(1)$ et on écrit $\boxed{f(x) \underset{a}{=} \ell + o(1)}$

• $$\boxed{\begin{aligned} f = o(g) &\overset{\text{déf}}{\iff} f = g \cdot \underline{\underline{o(1)}} \\ f = O(g) &\iff f = g \cdot \underline{\underline{O(1)}} \\ f \sim g &\iff f = g \cdot (1 + \underline{\underline{o(1)}}) \end{aligned}}$$

4) Par rapport à la notation:

• p.e. $f = g + o(h) \overset{\text{déf}}{\iff} f - g = o(h)$

• $f = o(g)$ ça veut dire que $f \in \{\text{ensemble des fcns. donnée par } g\}$ alors "="

cf. $\int f(x)\,dx = F(x) + C \overset{\text{déf}}{\iff} \int_a^x f(t)\,dt \in \{F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\}$ ← $2 \cdot C = C$ p.e. avec cette convention, ici pareil $2 \cdot O(1) = O(1)$

• $o(f) \equiv o(f(x))$

Prop:

1) $o(1) + o(1) = o(1)$
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \cdot o(1) = o(1)$
3) $(o(1))^n = o(1)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$
4) $(o(1))^\alpha = o(1)$ $\forall \alpha > 0$ lorsque le premier membre est défini.
5) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1 + o(1))^\alpha = 1 + o(1)$
6) Les règles 1), 2), 3) sont vraies aussi pour $o \to O$
7) $o(1) \cdot O(1) = o(1$

Exple:

1. $\sqrt{x+1}-1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\frac{x}{2}} \underset{\text{l'hôp.}}{\overset{\text{de}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{2}} = 1$

2. $\ln(10^6 x) \underset{\infty}{\sim} \ln(x)$ car $\ln(10^6 x) = \ln(10^6) + \ln(x) \underset{\uparrow}{=} \ln(x)\cdot\left[1 + \underbrace{\frac{\ln(10^6)}{\ln(x)}}_{x\to\infty \ \to 0}\right] \iff \ln(10^6 x) = \ln(x)\cdot(1+o(1))$
(pour $x>1$)

3. **Prop:** 1) $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$
2) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*$ $\boxed{[\ln(x)]^\beta = o(x^\alpha)}$
3) — " — $\boxed{x^\beta = o(e^{\alpha x})}$

Preuve:

1) Ex. 4 de V.1 : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

2) $\ln(x) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot \ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \overset{1)}{=} \frac{\beta}{\alpha}\, o\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \underset{\text{prop. ci-dessus}}{\overset{\text{2) de la}}{=}} o\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \implies (\ln(x))^\beta = \Big(\underbrace{o\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}_{x^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot o(1)}\Big)^\beta = x^\alpha\cdot o(1)^\beta \underset{\text{règle 4)}}{=} x^\alpha\cdot o(1)$
$= o(x^\alpha)$ □.

3) mettre $x = e^t$ (cdv) ds le 2) : $\underbrace{\ln(e^{\beta t})}_{t^\beta} = o(e^{\alpha t})$ pour $t\to\infty$, remplacer la suite t par x. □.