Université Claude-Bernard Lyon 1

Analyse2 INFO, printemps 2023

Fiche TD n°4,

Intégration

$\boxed{\textbf{Exercice}}$: Fait pendant l'ES.
<u>Exercice</u> : Fait pendant le TD.
Exercice : A faire à la maison.
Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cet UE.

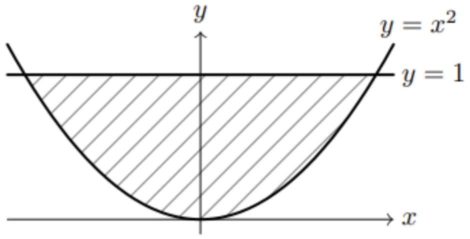
<u>Calcul d'aires</u>

Exercice 1. Considérons $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

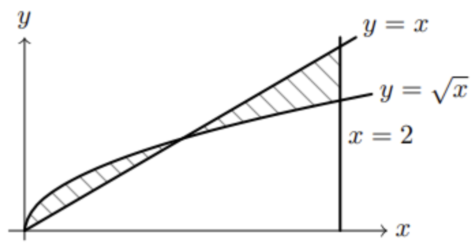
1. Dessiner le graphe de f.
2. Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que si l'on pose $\theta = \arccos(x)$, alors $(x, f(x)) = (\cos\theta, \sin\theta)$.
3. En déduire $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

<u>Exercice</u> 2. Déterminer l'aire des domaine hachurés représentés ci-dessous.

1.



2.

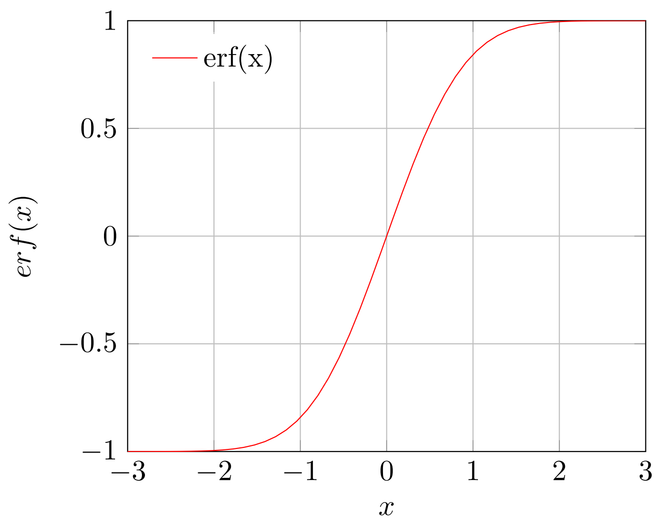


<u>Exercice</u> 3. Déterminer sans aucun calcul la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(x) \mathrm{d}x.$$

On pourra s'aider d'un dessin.

Exercice 4. On défini la fonction $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$, dont la représentation graphique est :



Déterminer graphiquement, sans aucun calcul d'intégrale la valeur de :

$$\int_{-2}^{2} erf(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice* 5. On considère la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

1. Sans faire de calcul, et grâce à des considérations géométriques, montrer que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1/2.$$

2. On se propose de retrouver ce résultat en faisant appel à la définition de l'intégrale de Riemann. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions en escalier u_n et v_n sur $[0,1]$ par

$$\forall k \in \{0,\dots,n-1\},\ \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[, \quad u_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n(x) = f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

et $u_n(1) = v_n(1) = 1$. Faire un dessin des fonctions f, u_n et v_n. Montrer que, par définition de l'intégrale de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}.$$

3. En faisant tendre n vers $+\infty$, en conclure que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1/2$
4. Finalement, retrouver le résultat encore une fois en faisant appel au théorème fondamental de l'analyse.

Intégrations par parties

Exercice 6. Une primitive de $\ln x$ est $x\ln x - x$, On pose $\alpha \in]0;1[$.

1. Calculer $\displaystyle\int_\alpha^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide de la primitive de $\ln x$.
2. Confirmer ce calcul d'intégrale par IPP.

Exercice 7. En utilisant intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x$

Exercice 8. En utilisant intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,\mathrm{d}x$

Exercice 9. En utilisant intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 x(\arctan x)^2\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^x\sin x\,\mathrm{d}x$

Indication : pour l'exercice 9 2., on proposera d'utiliser $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$ *comme primitive de* x.

Exercice 10. En utilisant intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x-1)e^x\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x^2 - \frac{\pi x}{2} + 2)\cos x\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^2 x^3\ln x\,\mathrm{d}x$

Exercice 11 (CCF 2022)**.** Évaluer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,\sin(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Exercice **12.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $C(\alpha) = \int_0^\alpha \cos^2(x)\mathrm{d}x$
2. $S(\alpha) = \int_0^\alpha \sin^2(x)\mathrm{d}x$

   Pour la suite de l'exercice, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.

3. Montrer par un changement de variables que (W_n) peut aussi s'écrire $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$
4. En effectuant deux intégrations par parties, trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2}.
5. Calculer W_n en fonction de n et donner les valeurs de W_n pour $n \in [0, \ldots, 3]$ en vérifiant que $W_2 = S(\frac{\pi}{2}) = C(\frac{\pi}{2})$.

Exercice* **13.** On pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (W_n) converge. En donner sa limite.
2. Trouver une relation de récurrence pour cette suite.
3. Calculer W_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante, égale à $\frac{\pi}{2}$.
5. Trouver un équivalent de W_n, c'est-à-dire une suite u_n telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{W_n} = 1$$

Changements de variables

Exercice **14.** En effectuant un changement de variables, calculer :

1. Avec le changement de variable $u = \ln x$, calculer $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Avec le changement de variable $u = e^x$, calculer : $\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$.
3. Avec le changement de variable $u = x^2$ (est-ce une bijection ?) calculer $\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x\cos x^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice **15.** En utilisant un changement de variable, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

Exercice **16.** En utilisant un changement de variable, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$
3. $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice **17.** Soit $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire. Montrer que

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice* **18.** Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(a+b-x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En déduire la valeur de $I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Exercice 19. Évaluer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$

Exercice 20 (CC 2022)**.** Évaluer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 e^x(3x^2-x+1)\mathrm{d}x\,.$

Intégrales de fractions rationnelles

Exercice 21. Évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{x(x+2)}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^3}\mathrm{d}x$

Exercice 22. Évaluer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x-2}{x^3+x}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-17x}{x^3+3x^2+3x+1}\mathrm{d}x$

Exercice 23. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_2^3 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$$

Exercice 24. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-1)}$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}\mathrm{d}x$

Exercice 25. Soit, $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)^2}$, définie sur $]2,+\infty[$.

1. Trouver toutes les primitives de f—ou :
   Calculer $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)^2}\mathrm{d}x$, d'abord pour $x>2$, puis aussi pour $x<2$. [1]
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Exercice 26. Soit, $f(x)\colon]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$. Trouver toutes les primitives de f.

Exercice 27. Évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{\frac{-\sqrt{3}-2}{4}}^{\frac{\sqrt{3}-2}{4}} \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

Indication : on pourra se servir du fait que $\arctan(a)-\arctan(b) = \arctan(\frac{a-b}{1+ab})$, $\forall a,b \in]-1,1[$.

Exercice 28. Évaluer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^x+1}\mathrm{d}x$

Exercice 29 (CCF 2022)**.**

1. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme suivant.
$$P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$$
2. Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationelle suivante.
$$F(X) = \frac{3X+1}{X^3-X^2+X-1}$$
3. Calculer
$$I = \int_2^3 F(x)\mathrm{d}x\,.$$

1. Souvent, l'ensemble des primitives d'une fonction f est désigné par $\int f(x)\mathrm{d}x$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de limites spécifiées pour l'intégrale, qui est donc appelée intégrale indéfinie. Le résultat s'écrit alors comme une primitive spécifique à laquelle on ajoute C, où C représente une constante arbitraire.

Intégrales de fractions rationnelles trigonométriques

On rappelle le résultat suivant : lorsqu'on essaie d'intégrer des fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{P(\sin(x); \cos(x))}{Q(\sin(x); \cos(x))}$$

Où P et Q sont des polynômes, on peut toujours se ramener à une intégrale de fraction rationnelle, via l'application des règles de Bioche.
Dans le cas général, on pose $u = \tan \frac{x}{2}$ et donc $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ et $\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$. (sur un intervalle où le changement de variables a un sens, et en se rendant compte que si nous sommes sûrs de nous ramener à une intégrale de fraction rationnelle, le calcul risque d'être long, *cf exercice 35 ci dessous*)

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **30.** Évaluer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.

Exercice 31. Évaluer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sin x}{3\cos x - 1}\mathrm{d}x$$

Exercice 32. Évaluer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

Exercice 33. Évaluer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$$

Exercice 34. Posons les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I + J$
2. Calculer $I - J$
3. En déduire les valeurs de I et J

Exercice* 35. Retrouver la valeur de l'intégrale calculée dans l'exercice 34 en utilisant le changement de variables proposé plus haut :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$$

Indication: $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$.

Exercice 36 (CC 2022)**.** On cherche à évaluer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2\mathrm{d}x}{3 - \cos x + 2\sin x}.$$

1. (1 pts) En utilisant le changement de variable $u = \tan(x/2)$ et donc : $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ et $\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+u+1/2}$.
2. (3 pts) Évaluer I.

Formulaire : Dérivées et primitives Usuelles

f' désigne la dérivée de f sur l'ensemble de dérivabilité D.

$f(x)$	$f'(x)$	D	$(f \circ u)'$
C	0	$\mathbb{R}$	
$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$a x^{a-1}$	$\mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $a \in \mathbb{Z}^-$, $\mathbb{R}_+^*$ sinon.	$(u^a)' = u' \times a u^{a-1}$
dont : $\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$(\mathrm{e}^u)' = u' e^u$
$\ln(\lvert x \rvert)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(\lvert u \rvert)' = \frac{u'}{u}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathbb{R}$	$(\mathrm{ch}\, u)' = u' \,\mathrm{sh}\, u$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathbb{R}$	$(\mathrm{sh}\, u)' = u' \,\mathrm{ch}\, u$
$\mathrm{th}\, x$	$1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$	$(\mathrm{th}\, u)' = u'(1 - \mathrm{th}^2 u) = \frac{u'}{\mathrm{ch}^2 u}$
$\mathrm{Arctan}\, x$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$(\mathrm{Arctan}\, u)' = \frac{u'}{u^2+1}$
$\mathrm{Arcsin}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$(\mathrm{Arcsin}\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\mathrm{Arccos}\, x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$(\mathrm{Arccos}\, u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

F désigne une primitive de f sur l'intervalle I.
C désigne une constante (qui DÉPEND de I).

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^a \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$\mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $a \in \mathbb{Z}^-$, $\mathbb{R}_+^*$ sinon.
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\mathrm{e}^{\alpha x} \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*)$	$\frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{\alpha x} + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$ ou $1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x + C$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ ou $1 - \mathrm{th}^2 x$	$\mathrm{th}\, x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathrm{Arctan}\, x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\, x + C$ ou $-\mathrm{Arccos}\, x + C$	$]-1,1[$

Se souvenir que

- si u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, une primitive de $f = u' \times v'(u)$ est $F = v \circ u + C$.
- $\int u'v = uv - \int uv'$ (intégration par parties).
- Si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, en notant $x = \varphi(t)$, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ et $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \varphi'(t) f(\varphi(t))\mathrm{d}t$ (changement de variable).