Université Claude-Bernard Lyon 1

ANALYSE2 INFO, printemps 2023

Fiche TD n^{o}3,

Suites récurrentes, fonctions monotones et fonctions convexes

Exercice : Exercices d'importance particulière, fait en SolEx.
Exercice : Fait pendant le TD
Exercice : Partie soulignée faite pendant le TD
Exercice : A faire à la maison/pour votre entraînement.
Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cet UE.

Suites récurrentes

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Vrai ou faux :

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.
2. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{1}{2}x+3$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=8$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Résoudre l'équation $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+3$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n=u_n-\alpha$. Écrire v_n en fonction de v_{n-1}.
3. Déterminer v_n en fonction de n.
4. Déterminer u_n en fonction de n. Quelle est sa limite ?

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{u_n+8}{2u_n+1}.$$

On pose alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$v_n=\frac{u_n-2}{u_n+2}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4. Soit $f\colon \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\to\mathbb{R}, x\mapsto\sqrt{2x-1}$. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5. Étudier la convergence et calculer l'éventuelle limite de chacune de ces suites :

1. $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + 5, u_0 = 3$
2. $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}, u_0 = 8$
3. $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}, u_0 = 0$
4. $u_{n+1} = -2u_n + 1, u_0 = 0$
5. $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}, u_0 = 2$
6. $u_{n+1} = \frac{u_n-1}{u_n+1}, u_0 = 2$

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **6.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{3-x^2}{2}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Montrer que f est décroissante sur $[0, \infty[$.
   (b) Montrer que l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$ est stable par f. Quelle conclusion en tirer sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) Trouver $\ell \in [0, +\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.
2. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos(u_n) - 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u_n converge et déterminer sa limite.
   Indication : Appliquer le théorème des acroissements finis à la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\cos(x)$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u_n converge et déterminer sa limite.
   Indication : Appliquer le théorème des acroissements finis à la fonction $x \mapsto 2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 8. Donner l'expression du terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Fonctions monotones et fonctions convexes

Exercice 9.

1. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction sinus est croissante, décroissante, convexe, concave.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
3. Montrer que pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 10.
Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

1. Montrer — avec un raisonnement par récurrence — que ceci implique l'inégalité de Jensen :
$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$
2. En déduire
$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n}. \tag{1}$$

Exercice 11. Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que la fonction ln est concave.
2. Montrer l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+$, on a
$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$
Indication : Utiliser l'analogue de l'équation (1) pour une fonction concave.
3. Montrer que pour tout réels positifs u, v, on a $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{u^q}{q}$.
Indication : Considerer $\ln\left(\frac{u^p}{p} + \frac{u^q}{q}\right)$.
4. En déduire l'inégalité de Hölder : pour tout $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \geq 0$, on a
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$
5. En déduire l'inégalité de Minkowski : pour tout $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \geq 0$, on a
$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}.$$

Exercice 12.

1. Montrer que $f : t \mapsto \ln(1 + e^t)$ est convexe.
2. En déduire que pour tout $x_1, \cdots, x_n \geq 0$, on a
$$1 + \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \prod_{i=1}^n (1 + x_i)^{1/n}.$$
3. En déduire que pour tout $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \geq 0$, on a
$$\prod_{i=1}^n (a_i + b_i)^{1/n} \geq \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n b_i\right)^{1/n}$$

Divers

Exercice 13.

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)^2+1$. Montrer que f est croissante sur $[1,\infty[$. Déterminer l'image de l'intervalle $]\,1,2[$ par f.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < 2$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
6. Soit de nouveau $u_{n+1} = f(u_n)$ mais cette fois-ci soit $u_0 = 10$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 14. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{1}{2}\sin x$ et considérons des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante.
2. Si une telle suite a une limite $l \in \mathbb{R}$, quelles sont les valeurs possibles pour l ?
3. Se convaincre par une analyse graphique que la suite a toujours une limite, pour toute valeur possible de u_0.
4. Soit $u_0 = \dfrac{7\pi}{2}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ existe et déterminer l.
5. Même question pour $u_0 = \dfrac{5\pi}{2}$.

Exercice 15. Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ et $a \in I$. On suppose que f est strictement croissante sur $[0,a[$ et strictement décroissante sur $]a,1]$. De plus, on suppose que $f(a) \leq a$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe sur l'intervalle $[0, f(a)]$.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que pour toute valeurs de u_0, u_n converge vers un point fixe de f.