Université Claude-Bernard Lyon 1

ANALYSE2 INFO, printemps 2023

Fiche TD n°2,

Dérivabilité, Accroissements finis.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$: Exercices d'importance particulière, fait en SolEx.
Exercice : Fait pendant le TD
Exercice : Partie soulignée faite pendant le TD
Exercice : A faire à la maison/pour votre entraînement.
Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cet UE.

Calcul des dèrivèes

Exercice 1. Pour chacune des expressions $f(x)$ ci-dessous, calculer $f'(x)$ (pour tout x où la fonction est dérivable) :

1. $x^4 + 3x^2 - 6$
2. $6x^{7/2} + 4x^{5/2} - 2x$
3. $\sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$
4. $x\,(x+3)\,e^x$
5. $\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$
6. $\dfrac{\ln x}{x^3}$
7. $(x+1)^3\sqrt{x}$
8. $\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}$
9. $\dfrac{\cos x}{\sin x}$

Exercice 2. Pour la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous, calculer la fonction dérivée f'.

$$f(x) = \ln\left(\frac{(3x^2+2)^3}{(1+\sin^2 x)\exp\left(\dfrac{\arctan x}{1+x^2}\right)}\right)$$

Indication : Simplifier avant de dériver.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer $\lim_{x\to a} \dfrac{a\,f(x) - x\,f(a)}{x-a}$, pour un $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. En utilisant que la derivée de la fonction sin et la fonction cos, calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Dérivabilité

Exercice 5.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & \text{si } x < 0 \\ \cos^2(\pi x), & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad . \tag{1}$$

2. Même question avec $f(x) = \sqrt{|x|}$.
   Est-ce que cette fonction est dérivable à gauche (à droite) en 0 ?
3. Même questions avec $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Exercice **6.** Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$f\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x + \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ \sin x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}.$$

1. Montrer que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$ en calculant sa dérivée.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. f' est elle continue en 0 ?
4. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?
5. f est-elle trois fois dérivable en 0 ?
6. Quel est le $n \in \mathbb{N}$ maximal tel que $f \in C^n(\mathbb{R})$?

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Pour quelles valeurs de n,

1. f_n est-elle continue ?
2. f_n est-elle dérivable ?
3. f'_n est-elle continue ?
4. f'_n est-elle dérivable ?

Des Accroissements finis

Exercice 8.
Montrer que 100 est une approximation de $\sqrt{10001}$ avec une erreur d'approximation inférieure à 2.10^{-2}.

Exercice 9.
1. Montrer que pour tous réels x et y : $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$.
2. Montrer que pour tous réels x et y tels que $x \neq y$: $|\cos y - \cos x| < |y - x|$.
   Indication : Si $|y - x| > 2$, c'est trivial. Pour $|y - x| \leq 2$, il y a au plus un $z \in E := \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ dans l'intervalle I entre x et y. S'il y en a pas, c'est facile car $|\sin \xi| < 1$ pour tout $\xi \in I$. Autrement, utiliser $|\cos y - \cos x| \leq |\cos y - \cos z| + |\cos z - \cos x|$.

Exercice 10.

1. Montrer que pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b$:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

2. En déduire que :

$$\frac{12}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{4}{3}.$$

3. Pour un autre choix de a, en déduire que l'on a même :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Exercice 11.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$: $0 < \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} H_n$ où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **12.** Soit f la fonction définie par $f(x) = x\ln x - x$.

1. En appliquant à f le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\ln n < f(n+1) - f(n) < \ln(n+1).$$

2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < f(n+1) + 1 < \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1).$$

3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Exercice 13.

1. Utiliser l'exercice 11 pour montrer que pour $\alpha \leq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \infty.$$

2. On suppose maintenant $\alpha > 1$. Pour $k \geq 2$, comparer $\dfrac{\alpha-1}{k^\alpha}$ et $\dfrac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$.

   Indication : Appliquer le TAF à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$.

3. Toujours pour $\alpha > 1$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \ell, \text{ avec } \ell < \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$