Université Claude-Bernard Lyon 1

Analyse2 INFO, printemps 2023

Fiche TD n°5,

Équations différentielles

$\boxed{\textbf{Exercice}}$: Fait pendant l'ES.
Exercice : Fait pendant le TD.
Exercice : La partie soulignée faite pendant le TD,
Exercice : A faire à la maison.
Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cette UE.

Équations différentielles linéaires du premier ordre homogènes

Exercice 1.
Déterminer la solution générale, puis la spécialiser aux conditions initiales données.
(Ci-desous $y \in C^1(\mathbb{R})$ et l'argument de la fonction y est $x \in \mathbb{R}$).

a) $y' - 3y = 0, \quad y(0) = 2.$

b) $y' - 3y = 0, \quad y'(0) = 2.$

c) $y' + 2y = 0, \quad y(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{e}.$

d) $y' + \cos(x)\, y = 0, \quad y(\pi) = -2.$

e) $y' + \cos(x)\, y = 0, \quad y'(\pi) = -2.$

f) $y' + \sinh(x)\, y = 0, \quad y(0) = 1.$

g) $y' + x^2\, y = 0, \quad y(0) = e.$

h) $\cosh(x)\, y' - \sinh(x)\, y = 0, \quad y(0) = 2.$
(Garder ces solutions pour Ex. 7 ci-dessous).

i) $\cosh(x)\, y' + \sinh(x)\, y = 0, \quad y(0) = 2.$

j) $(1 + x^2)\, y' + y = 0, \quad y(1) = 1.$

k) $(1 + x^2)\, y' + x\, y = 0, \quad y(\sqrt{3}) = 1.$

Exercice 2.
Déterminer la solution générale de y pour $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, puis la spécialiser aux conditions initiales données.

a) $\sqrt{1 - 4x^2}\, y' + y = 0, \quad y(0) = 1.$

b) $\sqrt{1 - 4x^2}\, y' + y = 0, \quad y(\frac{1}{4}) = 1.$

c) $\sqrt{1 - 4x^2}\, y' + 4x\, y = 0, \quad y(0) = 1.$

d) $(1 - 4x^2)\, y' + 4x\, y = 0, \quad y(0) = 1.$

e) $(1 - 4x^2)\, y' + 8x\, y = 0, \quad y(0) = 1.$

f) $(1 - 4x^2)\, y' + 16x\, y = 0, \quad y(0) = 1.$

Exercice 3.
Déterminer les solutions $y\colon I \to \mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes.

a) $x(1 - x^2)\, y' + y = 0.\ \ I =]0, 1[\ ,\ y(\frac{1}{2}) = 1.$

b) $y' + \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\, y = 0.\ \ I = \mathbb{R}\,,\ y(0) = 1.$

c) $y' + (\sin(x))^2\, y = 0.\ I = \mathbb{R},\ y(\frac{\pi}{2}) = -1.$

d) $(2+\cos(x))\, y' + \sin(x)\, y = 0,\ I = \mathbb{R},\ y(\frac{\pi}{4}) = 0.$

e) $x^n\, y' - y = 0.\ (n \in \mathbb{N}^*)\,;\ I = \mathbb{R}_+^*,\ y(1) = 0.$

f) $\sin(x)\, y' - y = 0.\ I =]0, \pi[, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1.$

Exercice* 4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x^2 y'(x) - y(x) = 0,\ x \in I.$$

a) Déterminer les solutions de (E) quand $I =]0, +\infty[$.

b) Déterminer les solutions de (E) quand $I =]-\infty, 0[$.

c) (E) admet-elle des solutions non-nulles définies sur $\mathbb{R}$?

Équations différentielles linéaires du premier ordre

I : On devine les solutions particulières

Exercice 5.

a) Deviner une solution de $y' + y = 2$.

b) Trouver la solution générale du problème homogène associé, c-à-d. de l'équation $y' + y = 0$.

c) En déduire la solution générale du problème initial, c-à-d. pour $y' + y = 2$.

d) Trouver la solution de $y' + y = 2$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = 3$.

e) Si l'on avait implémenté la condition initiale à la solution générale du problème homogène et que l'on ajoutait ensuite la solution particulière trouvée au point 1 ci-dessus, est-ce qu'elle satisferait toujours $y(0) = 3$?

Exercice 6.

a) Deviner une solution de $y' + y = 2e^x$.

b) Trouver la solution générale du problème homogène associé, c-à-d. de l'équation $y' + y = 0$.

c) En déduire la solution générale du problème initial, c-à-d. pour $y' + y = 2e^x$.

d) Trouver la solution de $y' + y = 2e^x$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = 3$.

e) Si l'on avait implémenté la condition initiale à la solution générale du problème homogène et que l'on ajoutait ensuite la solution particulière trouvée au point 1 ci-dessus, est-ce qu'elle satisferait toujours $y(0) = 3$?

Exercice 7.

a) Deviner une solution particulière de l'équation $\cosh(x)\, y' - \sinh(x)\, y = 1$.

b) À l'aide de la solution générale du problème homogène associé, obtenu dans l'exercice 1.**f**, trouver la solution générale de $\cosh(x)\, y' - \sinh(x)\, y = 1$.

c) En déduire la solution spéciale qui satisfait la condition initiale $y(0) = 2$.

d) Aurions-nous obtenu la même solution si nous avions ajouté la solution particulière trouvée au point 1 ci-dessus à la solution spéciale trouvée au 1.**f** ci-dessus ?

Exercice 8.

a) Deviner une solution particulière de l'équation $\sin(x)\, y' - \cos(x)\, y = 1$.

b) Trouver la solution générale de $\sin(x)\, y' - \cos(x)\, y = 0$ pour $x \in]0, \pi[$.

c) En déduire la solution spéciale qui satisfait la condition initiale $y(\frac{\pi}{2}) = 2$.
Est-ce que cette solution est bien définiée à $x = \pi$?

d) En utilisant la solution générale de $\sin(x)\, y' - \cos(x)\, y = 0$ pour $x \in]\pi, 2\pi[$, trouver la solution spéciale qui satisfait la condition initiale $y(\frac{3\pi}{2}) = 2$.
Est-ce que cette solution est bien définiée à $x = \pi$?

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes (trouver dans chaqu'un de ces cas la solution générale, puis la spécialiser pour $y(0) = 1$) :

a) $y'(x) = x^2 y(x)$.

b) $y'(x) - x^2 y(x) = x^2$.

c) $y'(x) - x^2 y(x) = (1 - x^2)e^x$.

d) $y'(x) - x^2 y(x) = x^2 + (1 - x^2)e^x$.

II : Plus systématiquement

Exercice 10. Nous considérons les équations différentielles suivantes et suivons la méthode de résolution standard : nous déterminons d'abord la solution générale du problème homogène, puis une solution particulière par "variation des constantes", dont la somme constitue la solution générale, qui devient finalement la solution recherchée en implémentant la condition initiale.

$(E_1)\ :\ y' - 2xy = \exp(x^2 - x).$ $\qquad$ $(E_3)\ :\ y' - y\tan(x) = \sin(x).$

$(E_2)\ :\ xy' - y + \ln(x) = 0.$ $\qquad$ $(E_4)\ :\ y'\sin(x) + y\cos(x) + 1 = 0.$

a) Déterminer la solution y de E_1 définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $y(1) = 3$.

b) Déterminer la solution y de E_2 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $y(e) = 1$.

c) Déterminer la solution y de E_3 définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et telle que $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

d) Déterminer la solution y de E_4 définie sur $]0, \pi[$ et telle que $y(\frac{\pi}{6}) = -1$.

Exercice* 11. Soit $J \subset \mathbb{R}_+^*$ un intervalle ouvert. Déterminer l'ensemble des fonctions $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ qui sont solutions de l'équation différentielle

$$xy' - y + |\ln(x)| = 0\,.$$

Exercice 12.
Le but de cet exercice est de trouver $y \in C^1(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ qui satisfait

$$\cos(x)\,y' - 2\,y = 2\cos(x) + \sin(2x)$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

a) Résoudre l'intégrale suivante pour $x \in]-1, 1[$:

$$I(x) = \int_0^x \frac{2}{1-u^2}du\,.$$

b) Résoudre l'intégrale suivante pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$J(x) = \int_0^x \frac{2}{\cos(v)}dv\,.$$

Indication : On observe que $\frac{1}{\cos(v)} = \frac{\cos(v)}{1-\sin^2(v)}$. Avec un changement de variable, déduire J du résultat pour I.

c) Trouver la solution générale de

$$\cos(x)\,y' - 2\,y = 0$$

pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

d) Trouver une solution particulière de

$$\cos(x)\,y' - 2\,y = 2\cos(x) + \sin(2x)$$

pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Indication : Utiliser la méthode de variation de la constante.

e) Conclure.

Exercice 13 (CCF 2022)**.**

1. Résoudre sur $[0,+\infty[$ l'équation

$$(E_0):\quad y' - \frac{1}{2(x+1)}\,y = 0.$$

2. A l'aide du changement de variable $u=\sqrt{1+t}$, calculer

$$\lambda(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt$$

pour tout $x \in [0,+\infty[$.

3. Résoudre sur $[0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E):\quad y' - \frac{1}{2(x+1)}\,y = x.$$

Exercice 14 (CCF 2022)**.**
Déterminer y la solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème suivant

$$\begin{cases} y''-2y'+5y=0 & ,\ x\in\mathbb{R}, \\ y(0)=1, y'(0)=5. \end{cases}$$

Exercice 15.
Déterminer y la solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème suivant

$$\begin{cases} y''-2y'+5y=(5x-3)e^{2x} & ,\ x\in\mathbb{R}, \\ y(0)=1, y'(0)=5. \end{cases}$$

III : Divers

Exercice* 16.
Relation avec des espaces vectoriels :

a) Soit $a \in C^0(\mathbb{R})$. Montrer que

$$E = \{y \in C^1(\mathbb{R}) |\, y'(x) + a(x)\,y(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ? En donner une base.

b) Soient $a, b \in C^0(\mathbb{R})$ et b une fonction non-nulle. Montrer que

$$F = \{y \in C^1(\mathbb{R}) |\, y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$.

Exercice* 17. On se propose de déterminer toutes les applications dérivables $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant la relation fonctionnelle :

$$(R) :\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ f(s+t) = f(s)f(t).$$

a) Montrer que si f vérifie (R) alors elle est solution de l'équation différentielle : $y' = f'(0)\,y$.

b) Conclure.

Exercice 18. On considère l'équation différentielle (E) : $(x^2+1)y' - (2x+1)y = -2x^2+3$.

a) Montrer que (E) admet une solution définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ax+b$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

b) En déduire la solution $y \in C^1(\mathbb{R})$ de (E) telle que $y(0)=1$.

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

I : du premier ordre

Exercice 19. (CC TMB 2009) On va chercher à résoudre $y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = 2$.

a) Résoudre l'équation homogène $y' + 2y = 0$.

b) Chercher une solution particulière de l'équation, soit on cherchant une solution sous la forme $y(x) = (ax + b)e^{-x}$, $a, b, \in \mathbb{R}$ soit au moyen de la méthode de variation de la constante.

c) En déduire toutes les solutions de l'équation proposée, puis la solution satisfaisant la condition initiale.

Exercice* 20. Le but de cet exercice est de trouver la solution générale—dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$—de

$$y' - (1 + i)y = xe^x \cos x.$$

a) Résoudre le problème homogène.

b) Trouver une solution particulière pour $y' - (1 + i)y = \frac{x}{2} \exp((1 - i)x)$.

c) Trouver une solution particulière pour $y' - (1 + i)y = \frac{x}{2} \exp((1 + i)x)$.

d) Finir. Puis spécialiser à la condition initiale $y(0) = 2$.

Exercice 21. On considère l'équation différentielle ($\omega \in \mathbb{R}$)

$$(E) : \ y' + y = 3\sin(\omega x) + 4\cos(\omega x).$$

a) Montrer que (E) admet une solution ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)$.
a et b sont deux réels que l'on déterminera.

b) Déterminer la solution $y \in C^1(\mathbb{R})$ de (E) telle que $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Exercice 22. Dans cet exercice, nous voulons résoudre l'équation différentielle suivante pour la condition initiale $y(0) = 2$:

$$y' + 3y = 10x^2e^{2x} + 2e^{-3x} - 6.$$

a) Trouver la solution générale y_0 du problème homogène associé, c.-à-d. de l'équation

$$y' + 3y = 0.$$

b) Trouver une solution particulière de l'équation

$$y' + 3y = 10x^2e^{2x}.$$

Indication : Soit utiliser la méthode de variation de la constante, soit essayer de trouver une solution de la forme $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.

c) Trouver une solution particulière de l'équation

$$y' + 3y = 2e^{-3x}.$$

Indication : Soit utiliser la méthode de variation de la constante, soit essayer de trouver une solution de la forme $y_2(x) = Axe^{-3x}$.

d) Trouver une solution particulière y_3 de l'équation

$$y' + 3y = -6.$$

e) Conclure.

II : Equations homogènes et du second ordre

Exercice 23.
Déterminer les solutions $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des équations différentielles suivantes (solution générale, puis solution spéciale satisfaisant les conditions initiales).

a) $y'' + 4y' + 3y = 0$. $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

b) $y'' + y' + y = 0$. $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

c) $y'' + 2y' + y = 0$. $y(1) = -1$, $y'(1) = 1$.

d) $y'' + \omega^2 y = 0$. $(\omega \in \mathbb{R}_+^*)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

e) $y'' + my' + 9y = 0$. $(m \in \mathbb{R})$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

f) $y'' - (1-\alpha)y' - \alpha y = 0$. $(\alpha \in \mathbb{R})$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 24. Soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = 4x^2.$$

a) Montrer que (E) admet une solution y_p définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels à déterminer.

b) Résoudre (E).

Exercice 25. Soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y = \cos(x).$$

Déterminer la solution $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de (E) telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 26. Dans cet exercice, nous voulons résoudre l'équation différentielle suivante pour les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$:

$$y'' - 2y' + 3y = 9x^2 e^{2x} + 4e^x.$$

a) Trouver la solution générale y_0 du problème homogène associé, c.-à-d. de l'équation

$$y'' - 2y' + 3y = 0.$$

b) Trouver une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 3y = 9x^2 e^{2x}.$$

Indication : Trouver une solution de la forme $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.

c) Trouver une solution particulière y_2 de l'équation

$$y'' - 2y' + 3y = 4e^x.$$

d) Conclure.

Exercice 27. Soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)\exp(-x).$$

Montrer que (E) admet une solution y_p définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto (ax + b)\exp(-x)$ où a et b sont des nombres réels à déterminer. Résoudre ensuite (E).

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **28.**
Le but de cet exercice est de trouver la solution de

$$y'' + 2y' + 5y = 20\, e^x \cos 2x$$

avec les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = -3$.
Remarque : Une telle solution est unique. On obtient la même, que l'on exige dès le début que y soit à valeur réelle, $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ou que l'on admette y à valeur complexe, $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

a) Trouver un système fondamental dans $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour le problème homogène associé en utilisant la fonction exponentielle. Autrement dit, trouver une base pour l'espace vectoriel des solutions à l'équation

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

à valeurs complexes. Puis écrire la solution générale de ce problème homogène avec deux constants $A, B \in \mathbb{C}$. Quelle est la relation entre A et B de sorte que l'on ait une solution du problème homogène avec des valeurs réelles ?

b) En déduire un système fondamental pour le problème réel, c.-à-d. trouver une base pour l'espace vectoriel $E = \{y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) |\, y'' + 2y' + 5y = 0\}$. Puis écrire la solution générale du problème homogène avec deux constants $a, b \in \mathbb{R}$. Quelle est la relation entre A, B et a, b ?

c) Trouver une solution particulière.
Indication : Essayer $y = \alpha e^x \cos 2x + \beta e^x \sin 2x$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ou, mieux et équivalent (pourquoi ?), $y = \Re\mathrm{e}\,(C \exp[(1 + 2i)x])$, $C \equiv \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$. Dans la deuxiéme méthode, on cherche d'abord une solution de la forme $y = C \exp[(1 + 2i)x]$, $C \in \mathbb{C}$, du problème $y'' + 2y' + 5y = 20 \exp[(1 + 2i)x]$ et ensuite seulement on prend en la partie réelle.

d) En déduire la solution générale et puis la spécialiser aux conditions initiales.

Exercice 29.

a) Trouver la solution générale pour $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de

$$y'' - 6y' + 13y = 0\,.$$

b) Déterminer la solution qui satisfait $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

c) Déterminer la solution qui satisfait $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

d) Déterminer la solution de

$$y'' - 6y' + 13y = \exp(2x) \sin(3x)$$

qui satisfait $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. (Attention : Le calcul est un peu long).
Indication : Trouver une solution particulière de la forme $y = a \exp(2x) \cos(3x) + b \exp(2x) \sin(3x)$.

e)* Déterminer la solution de

$$y'' - 6y' + 13y = \exp(3x) \sin(2x)$$

qui satisfait $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. (Attention : Le calcul est un peu long).
Indication : Trouver une solution particulière qui est une combinaison linéaire du problème homogène multipliée par x.

f)* Déterminer la solution de

$$y'' - 6y' + 13y = \exp(2x) \sin(3x) + 52 \exp(2x) \sin(3x)$$

qui satisfait les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.