Université Claude Bernard Lyon 1 — **Semestre printemps 2023**

L1 — UE : Analyse 2

Examen final du 12 mai 2023

Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

<u>Exercice 1</u> (5 points)

a) (3 pts) Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}.$$

b) (2 pts) Donner toutes les primitives de la fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2(x^2+1)}$, c'est-à-dire, déterminer

$$\int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

pour $x \neq 0$.

<u>Exercice 2</u> (4 points) Calculer les intégrales suivantes :

a) (2 pts) $\displaystyle\int_1^2 x^3 \ln x \,\mathrm{d}x\,;$ **b)** (2 pts) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

<u>Exercice 3</u> (4 points)

a) Donner l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

pour des conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

b) Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

pour des conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

<u>Exercice 4</u> (5 points) Dans cet exercice, nous voulons résoudre l'équation différentielle suivante pour la condition initiale $y(0) = 0$:

$$(2 + \sin x)\, y' + \cos(x)\, y = e^x. \tag{1}$$

a) (2 pts) Trouver la solution générale y_h du problème homogène associé, c.-à-d. de l'équation

$$(2 + \sin x)\, y' + \cos(x)\, y = 0.$$

b) (2 pts) Trouver une solution particulière y_p de l'équation différentielle (1) en utilisant la méthode de variation de la constante.

c) (1 pt) Conclure : donner la solution de l'équation (1) sous la condition initiale $y(0) = 0$.

<u>Exercice 5</u> (2 points) Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \ln(1 + \sin x)}{x^2}.$$

Indication : Pour $x \to 0$, on a $\sin x = x + o(x^2)$ et $\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

<u>Exercice 6</u> (4 points)

a) (1 pt) Montrer que pour tous réels x et y,

$$|\cos y - \cos x| \leqslant |y - x|.$$

b) (0.5 pt) En déduire que $\cos(0.01) \geq 0.99$.

c) (1.5 pt) Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cos à l'ordre 3 entre 0 et x.

d) (1 pt) En déduire une valeur approchée de $\cos(0.01)$ à 10^{-8}.